



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Übergang zum heliozentrischen Weltbild</b>	<b>1</b>
1.1	Eine kurze Geschichte der Copernicanischen Revolution . . . . .	1
1.2	Die Grundidee des heliozentrischen Systems . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Bestimmung von Bahndaten</b>	<b>9</b>
2.1	Bestimmung der Umlaufzeiten . . . . .	9
2.2	Bestimmung der Bahnradien . . . . .	10
2.3	Übung . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Keplers Gesetze und das Gravitationsgesetz</b>	<b>13</b>
3.1	Wiederholung . . . . .	13
3.2	Vergleich zwischen geozentrischer und heliozentrischer Beschreibung . . . . .	14
3.3	Kepler und Newton . . . . .	15
3.4	Newtons Ableitung des 2. Kepler'schen Gesetzes . . . . .	16
3.5	Keplers 3. Gesetz und das Gravitationsgesetz . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Über Ellipsen</b>	<b>20</b>
4.1	Zur Geometrie der Ellipse . . . . .	20
4.1.1	Die "Gärtner-Konstruktion" . . . . .	20
4.1.2	Die Ellipse als gestauchter Kreis . . . . .	21
4.1.3	Die „Spiegel-Konstruktion“ . . . . .	23
4.2	Die Ellipsenform der Planetenbahnen 1 . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Newton und die Kepler-Ellipsen</b>	<b>27</b>
5.1	Die Ellipsenform der Planetenbahnen 2 . . . . .	27
5.2	Kepler-Bewegung . . . . .	32
5.2.1	Weitere geometrische Aspekte der Ellipse . . . . .	33
5.2.2	Die Kepler-Gleichung . . . . .	34
5.3	Lösung der Kepler-Gleichung . . . . .	37
5.3.1	Graphisches Verfahren . . . . .	37
5.3.2	Iteratives Verfahren . . . . .	37
5.3.3	Newton-Verfahren . . . . .	37
5.4	Hausaufgabe . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Zwei- und Mehrkörperproblem</b>	<b>40</b>
6.1	Das Kepler-Problem als Einkörper-Problem . . . . .	40
6.2	Verallgemeinerung auf das Zwei-Körper-Problem . . . . .	40
6.3	Ausblick auf das Mehr-Körper-Problem: Das eingeschränkte Drei-Körper-Problem . . . . .	43
6.3.1	Die Lagrange-Punkte des eingeschränkten Drei-Körper-Problems . . . . .	43
6.3.2	Die Berechnung der Lagrange-Punkte . . . . .	44
6.3.3	Das effektive Potential im reduzierten Drei-Körper-Problem . . . . .	45
6.3.4	Periodische Orbits im reduzierten Drei-Körper-Problem . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Folien</b>	<b>53</b>

## Literatur

- [1] N. Copernicus, *Über die Kreisbewegungen der Himmelskörper*, Akad. Verlagsgesellschaft: Leipzig 1939 (auch in [5])
- [2] D. L. Goodstein, J. Goodstein: *Feynmans verschollene Vorlesung: Die Bewegung der Planeten um die Sonne*, Piper: München 1998
- [3] Gómez, G. et al.: *Study of the transfer from the Earth to a halo orbit around the equilibrium point  $L_1$* , *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **56**, 541 (1993)
- [4] A. Guthmann: *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung*, BI-Wissenschaftsverlag: Mannheim usw. 1994
- [5] S. Hawking (Hrsg.): *Die Klassiker der Physik*, Hoffmann und Campe: Hamburg 2004
- [6] J. Kepler, *Neue Astronomie*, R. Oldenbourg: München 1990
- [7] J. Kepler, *Weltharmonik*, R. Oldenbourg: München 1997 (auszugsweise auch in [5])
- [8] *The Lagrange Points*, <http://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf>
- [9] I. Newton: *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*, Unveränderter Nachdruck der Ausgabe Berlin 1872, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1963

# 1 Der Übergang zum heliozentrischen Weltbild

## 1.1 Eine kurze Geschichte der Copernicanischen Revolution

Die Darstellung dieses Abschnittes lehnt sich eng an Feynman ([2]) an.

- **Plato, Aristoteles (4. Jahrhundert v.Chr.), Ptolomäus (2. Jahrhundert n.Chr.)**

- In der Aristotelischen Welt bestand alle Materie aus den vier Elementen Erde, Wasser, Luft und Feuer, von denen jedes seinen natürlichen Platz hatte: Erde, von Wasser umgeben, im Mittelpunkt der Welt, dann Luft und Feuer in Schalen mit zunehmendem Radius. Alle natürliche Bewegung beruhte darauf, dass die Elemente ihren natürlichen Ort aufsuchten (Schwere Körper versuchen zu fallen, Blasen im Wasser steigen auf, ...). Alle anderen Bewegungen müssen erzwungen werden: Ein Ochsenkarren zum Beispiel würde sich nicht bewegen, wenn er nicht gezogen würde.
- Die himmlischen Körper drehen sich an kristallinen Kugeln („Sphären“). Diesen Kugeln waren nur perfekte Bewegungen möglich, d.h. Kreisbewegungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Im Himmel gab es keinerlei Veränderungen.
- Dieses System erklärte nicht nur alle Bewegungen befriedigend. Es ordnete darüberhinaus dem Menschen einen festen Platz zu – und dieser Platz war das Zentrum im Universum.
- Allerdings gab es Probleme: Vollführten die Sterne, und meist auch Sonne und Mond, ihre Bewegungen hinreichend genau, so verhielten sich die Planeten („Wandelsterne“) nicht in der erwünschten Weise. Um auch für sie die Platonische Forderung nach perfekter Kreisbewegung zu erfüllen, trotzdem aber „die Phänomene retten“ zu können, wurde die Epizykeltheorie entwickelt, die es erlaubte, durch Hinzufügen weiterer Epizykel befriedigende Übereinstimmungen zwischen Berechnung und Beobachtung zu erzielen.
- Dieses System wurde im Laufe von fünf Jahrhunderten perfektioniert und von Ptolomäus in seinem **Almagest** (2. Jahrhundert n.Chr.) abschließend zusammengefasst. Der Almagest blieb für 14 Jahrhunderte das verbindliche Lehrbuch der Astronomie.

- **Copernicus (1473-1543)**

- In seinem Buch **De revolutionibus orbium coelestium (Über die Kreisbewegungen der Weltkörper [1])**, das im Todesjahr 1543 veröffentlicht wurde, zeigte Copernicus, dass das antike System mathematisch etwas vereinfacht werden konnte, wenn man die Sonne statt der Erde ins Zentrum setzte. Diese neue, zunächst nur mathematisch betrachtete, neue Sehweise wurde in den nächsten Jahrzehnten nur von wenigen Fachleuten beachtet und von noch weniger Menschen gelesen. Allerdings wurde sie von Jesuiten in China sogar gelehrt, aber die Kirche war durch Luther beansprucht.
- Trotzdem gab es einige wenige, die Kenntnis von dem neuen System nahmen und sich darüber Gedanken machten. Insbesondere drei Männer spielten eine entscheidende Rolle bei der Überwindung des geozentrischen Universums.

- **Tycho Brahe (1546-1601)**

- Tycho bemerkte bei der Beobachtung einer engen Konjunktion zwischen Jupiter und Saturn im August 1563, dass die astronomischen Tabellen – die Copernicanischen eingeschlossen! – um mehrere Tage danebenlagen. Nachdem er im Jahre 1572 eine Supernova beobachtet und nachgewiesen hatte, dass diese Veränderung *nicht* in der sublunaren Sphäre, sondern im unveränderlichen Himmel stattgefunden hatte, wurde er berühmt und bekam vom dänischen König eine Sternwarte auf der Insel Hven eingerichtet (*Uraniborg*).
- Während seiner 20 Jahre währenden Tätigkeit auf Hven beobachtete Tycho Sterne und Planeten mit noch nicht dagewesener Präzision und verbesserte die Genauigkeit der astronomischen Tabellen von 10' auf 2'.
- Nach einem Streit mit dem König wurde Tycho 1597 kaiserlicher Mathematiker in Prag. Dort wollte er seine Daten dazu verwenden, sein eigenes Weltsystem (Die Sonne kreist um die Erde, aber alle Planeten bewegen sich um die Sonne.) zu stützen. Dieses Modell verletzte das Aristotelische Weltbild stärker als das Copernicanische, weil es die kristallinen Kugelschalen endgültig zerschlug.
- Aber Tychos mathematische Fähigkeiten reichten nicht aus. Deshalb holte er 1600 Kepler nach Prag, auf den er aufgrund seines Buches „Mysterium cosmographicum“ aufmerksam geworden war, in dem Kepler begründete, *warum* es genau sechs Planeten gab, und in dem er auch die Radien ihrer Bahnen ableitete.

- **Johannes Kepler (1571-1630)**

- Nach dem plötzlichen Tode von Tycho wurde Kepler sein Nachfolger als kaiserlicher Mathematiker und gelangte in den Besitz der wertvollen Daten des Verstorbenen. Er begann mit der Auswertung der Daten aus der Sicht des Copernicanischen Systems (Alle Örter werden in Bezug auf die Sonne beschrieben!): Sein „Kampf mit der Marsbahn“ begann.
- Zunächst untersuchte er die Erdbahn so genau wie möglich: Sie erwies sich tatsächlich mit hinreichender Genauigkeit als Kreisbahn, deren Mittelpunkt allerdings nicht in der Sonne, sondern etwas außerhalb lag ( $e = 0.0167$ ).
- Die Marsbahn konnte jedoch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit auf diese Weise beschrieben werden: Es gab Abweichungen bis zu 8'! Kepler musste zunächst das Dogma des gleichförmigen Umlaufes fallen lassen – und schließlich sogar nach anderen Bahnformen suchen.
- In seinem epochemachenden Buch „**Astronomia Nova**“ (**Die neue Astronomie**) ([6], 1609) findet er nach langem, ausführlich beschriebenem, Suchen sein

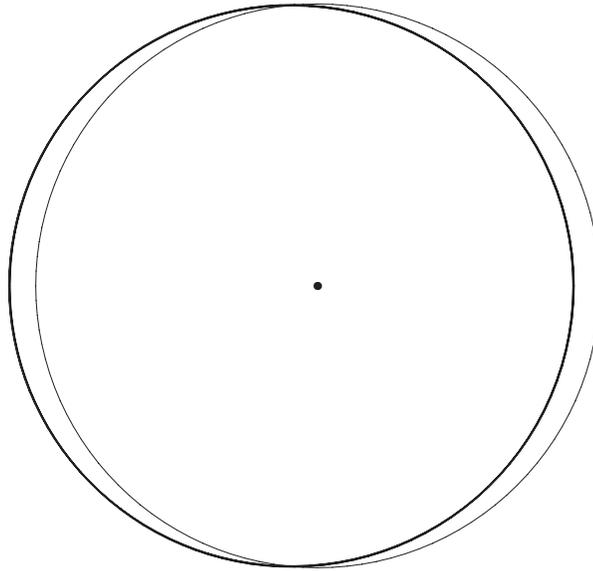
**1. Kepler'sches Gesetz**

*Die Bahnen aller Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.*

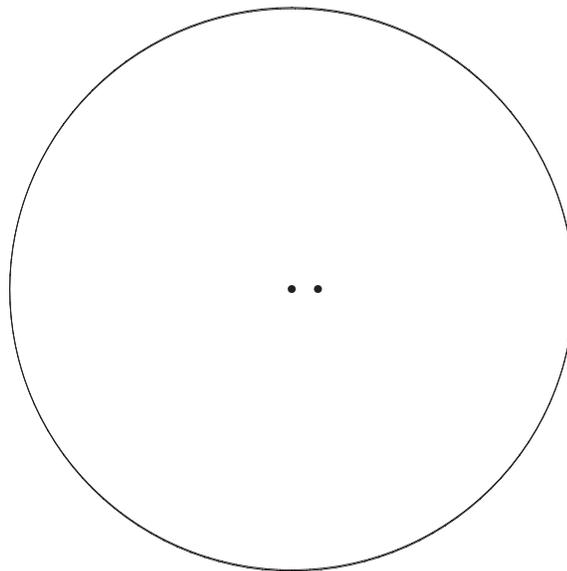
Die Bedeutung dieses Gesetzes, das Kepler rein empirisch fand, kann kaum überschätzt werden.

Ellipsen sind eine der vier Formen sogenannter Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel). Ihre Eigenschaften werden wir später genauer untersuchen.

- Wie hoch Keplers Anspruch an die Genauigkeit war, veranschaulichen die folgenden Bilder, die die Form der Marsbahn maßstabsgerecht mit einem Kreis vergleichen:



Marsbahn und Kreis bezüglich der Sonne, d.h. Brennpunkt der Ellipse und Mittelpunkt des Kreises identifiziert



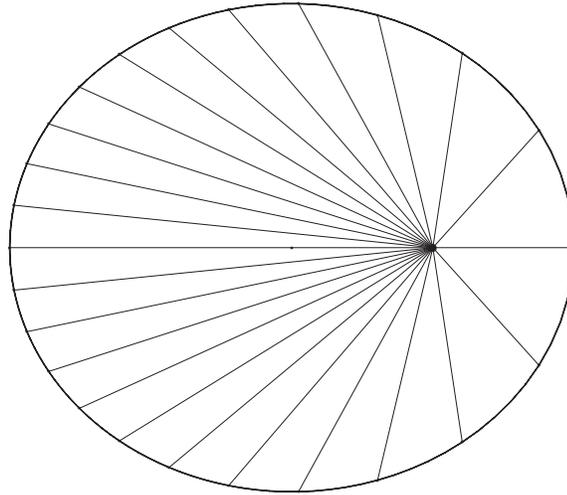
Marsbahn und Kreis bezüglich des Mittelpunktes, d.h. beide Mittelpunkte identifiziert

- Bereits vor seinem ersten hatte Kepler, in demselben Buch, sein zweites Gesetz gefunden:

### **2. Kepler'sches Gesetz**

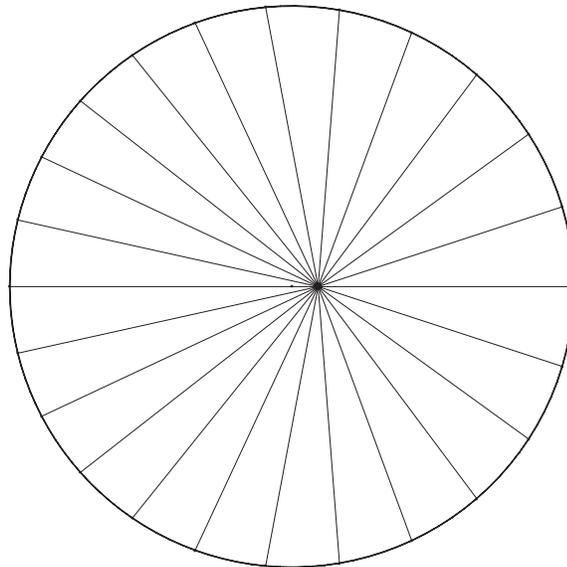
*Die Verbindung Sonne - Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Der Planet bewegt sich also umso schneller, je näher er der Erde ist.



Kepler-Bewegung auf einer Ellipse mit  $e = 0.5$  (d.h. der Abstand Mittelpunkt - Brennpunkt ist gerade halb so groß wie die große Halbachse)

In diesem Bild ist jedoch, wie üblich, die Exzentrizität der Ellipse stark übertrieben dargestellt. Die tatsächliche Marsbewegung veranschaulicht das folgende Bild:



Bewegung von Mars auf seiner Bahn, maßstabsgerecht dargestellt ( $e = 0.093$ )

- Erst zehn Jahre später, in seinem Buch „**Harmonices Mundi**“ (**Harmonie der Welt** [7]) (1619), findet Kepler ein Gesetz, das die Bahnen der verschiedenen Planeten untereinander vergleicht:

### **3. Kepler'sches Gesetz**

*Die dritten Potenzen der großen Halbachsen verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufzeiten.*

$$\frac{r_i^3}{r_j^3} = \frac{T_i^2}{T_j^2} \implies \frac{r_i^3}{T_i^2} = \frac{r_j^3}{T_j^2} = \text{const} \quad (1)$$

- Mit Hilfe dieser drei Gesetze berechnete Kepler neue Planetentafeln, die sogenannten *Rudolfinischen Tafeln* (1627), durch die die Astronomie um den Faktor 100 genauer wurde, als sie je vorher gewesen war!

- **Galileo Galilei (1564-1642)**

- Galilei glaubte nicht an Keplers Gesetze, aber er war mit ihm von der Richtigkeit des Copernicanischen Systems überzeugt – eines Systems, das nicht nur der Aristotelischen Lehre (und damit der Kirche!) widersprach, sondern auch eine Zumutung für den gesunden Menschenverstand war: Die Drehung der Erde um ihre eigene Achse macht es erforderlich sich vorzustellen, dass man mit ungeheurer Geschwindigkeit herumgewirbelt wird – in unseren Breiten in jeder Sekunde um etwa 300m! Noch unvorstellbarer ist die Bewegung der Erde um die Sonne: Sie bewegt sich mit  $30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  durch das All – in jeder Stunde um mehr als das 8-fache ihres Durchmessers – und wir mit ihr! Warum merken wir nichts davon?
- Galilei leistete wesentliche Beiträge zur Durchsetzung des heliozentrischen Systems:
  - \* Er richtete als erster ein Fernrohr zum Himmel und entdeckte dabei
    - auf dem Mond Berge und Krater wie auf der Erde,
    - die Phasengestalten der Venus, die (als Vollvenus) zeigten, dass die Venus, im Gegensatz zum antiken Weltbild, auch *hinter* der Sonne stehen konnte,
    - die Monde des Jupiter, die zeigten, dass die Erde nicht als einziger Planet einen Mond hat und dass es ein System gibt, das sich um ein anderes Zentrum als die Erde bewegt.
  - \* Er entwickelte das Experiment als naturwissenschaftliche Methode, die Mathematik als *Sprache der Natur* und *Reibungsfreiheit* und das *Vakuum* (undenkbar für Aristoteles!) als *Idealisierungen*.
  - \* Er fand den Trägheitssatz in der Form: *Für ein Objekt, das sich in horizontaler Bewegung befindet, ist es natürlich, sich mit konstanter Geschwindigkeit weiterzubewegen.* Damit konnte er erklären, warum von der schnellen Bewegung nichts zu bemerken ist: Alle Gegenstände der Umgebung nehmen in gleicher Weise an ihr teil!
  - \* Schließlich entdeckte er das Gesetz, nachdem Körper fallen: *Die Fallstrecke ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Im Vakuum ist die Fallbeschleunigung unabhängig von Gestalt und Masse der fallenden Körper.* Nur der Luftwiderstand bewirkt also, dass leichte Körper langsamer fallen als schwere!
- Galileis Entdeckung, dass Trägheit zusammen mit Gravitation (in der Gestalt des Fallgesetzes) in der Nähe der Erde zu Bahnformen in Gestalt einer Parabel (eines der Kegelschnitte!) führen, benutzte später Newton, um zu zeigen, wie „das Weltall funktioniert“!

- Galileos Auseinandersetzung mit der Kirche führte dazu, dass die wissenschaftliche Revolution Italien verließ und, nach einem kurzen Aufenthalt in Frankreich (Descartes: „In der Abwesenheit äußerer Kräfte bleibt ein ruhender Körper in Ruhe, und ein sich bewegender Körper bewegt sich weiter geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.“), in England ihren Fortgang nahm.

- **Isaac Newton (1643-1727)**

- Das größte Verdienst Newtons waren seine dynamischen Prinzipien, durch die die Aristotelische Weltsicht ersetzt wurde. Als er 1687 sein Hauptwerk veröffentlichte (**Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Mathematische Prinzipien der Naturlehre [9])**) hatte er sie auf drei Gesetze reduziert:

- 1. Newton'sches Gesetz (Trägheitssatz)**

*Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.*

- 2. Newton'sches Gesetz (Grundgesetz der Mechanik)**

*Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*

- 3. Newton'sches Gesetz (Wechselwirkungsprinzip)**

*Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper auf einander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.*

Diese Gesetze ersetzen die „natürlichen“ und „erzwungenen“ Bewegungen der Aristotelischen Mechanik.

- Newton fügte die spezifische Natur der Kraft hinzu, die zwischen Sonne und Planeten wirkt,

*Die Kräfte, durch welche die Planeten beständig von der geradlinigen Bewegung abgezogen, und in ihren Bahnen erhalten werden, sind nach der Sonne gerichtet und den Quadraten ihrer Abstände von derselben umgekehrt proportional. (S. 385)*

oder zwischen einem Planeten und seinen Monden

*Die Kraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, ist nach der Erde gerichtet und dem Quadrat des Abstandes seiner Oerter vom Centrum der Erde umgekehrt proportional. (S. 385)*

- oder zwischen beliebigen Körpern im Universum.

*Alle Körper sind gegen die einzelnen Planeten schwer, und die Gewichte der ersteren gegen jeden Planeten sind in gleichen Abständen vom Mittelpunkt des letzteren der Menge der in den einzelnen Körpern befindlichen Materie proportional. (S. 389)*

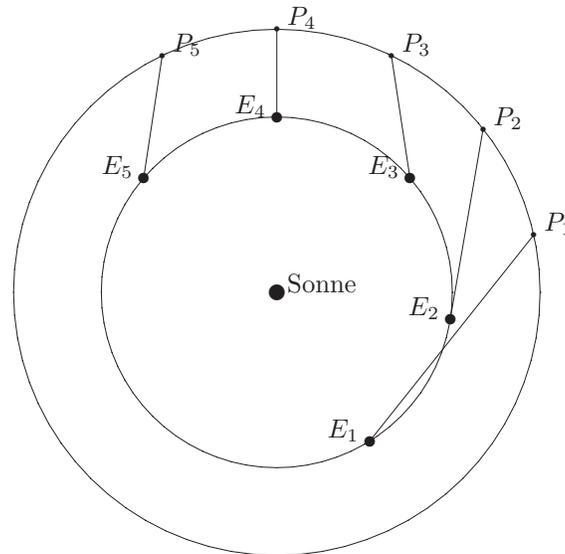


Abbildung 1: Die Rückläufigkeit eines äußeren Planeten im heliozentrischen Weltbild

Das war die **Gravitationskraft**, deren Eigenschaften er aus dem zweiten und dritten Kepler'schen Gesetz ableitete. Anschließend zeigte er umgekehrt, dass sich aus seinen drei Gesetzen und dem Gravitationsgesetz die elliptischen Bahnen der Planeten ergeben.

- Newton fasste die Beobachtungen und Gedanken von Copernicus, Brahe, Kepler, Galileo und Descartes zusammen:

*Wenn ich weiter gesehen habe, dann deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stehe.*

Durch ihn wurde die Welt wieder geordnet und vorhersagbar. Und der Beweis für die Richtigkeit seines Systems war seine Ableitung der Kepler'schen Gesetze.

## 1.2 Die Grundidee des heliozentrischen Systems

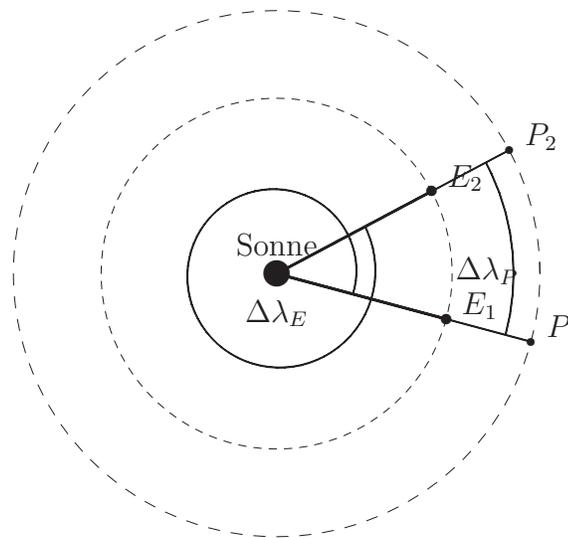
- Alle Planeten bewegen sich (in der einfachsten Gestalt der Theorie!) gleichförmig auf Kreisbahnen um die Sonne. Alle diese Kreisbahnen liegen in einer Ebene.
- Beobachtung der anderen Planeten von der sich bewegenden Erde aus führt zu einem *Parallaxeneffekt*: Der Effekt ist jedem vom Auto- oder Bahnfahren bekannt: Die Gegenstände der Umgebung scheinen sich entgegengesetzt zur eigenen Bewegungsrichtung („nach hinten“) zu bewegen – und zwar umso schneller, je näher sie sind.
- Aus dem Parallaxeneffekt ergibt sich eine Rückläufigkeit, wenn die Erde von einem inneren Planeten überholt wird oder wenn die Erde ihrerseits einen äußeren Planeten überrundet. So kann man im folgenden Bild erkennen, dass der Planet, von der Erde aus betrachtet, zwischen den Positionen 1 - 3 rechtläufig ist (d.h. die Sichtlinie dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn), zwischen den Positionen 3 - 5 dagegen rückläufig.

- Veranschaulichung mit mechanischem Modell
- durch Programm PlanSch1
- Wenn die Erde einen äußeren Planeten überholt, steht dieser von der Erde aus gesehen der Sonne genau gegenüber: **Opposition** (Position 4 in Abb. 1)
- Wenn die Erde von einem inneren Planeten überholt wird, dann steht dieser von der Erde aus gesehen genau zwischen Erde und Sonne: **untere Konjunktion**

## 2 Bestimmung von Bahndaten

### 2.1 Bestimmung der Umlaufzeiten

- Beobachtet werden können nur *geozentrische* Positionen und damit die so genannte **synodische Umlaufzeit**  $T_{syn}$ , das ist die Zeit, die vergeht, bis der Planet *relativ zur Sonne* dieselbe Position am Himmel wieder einnimmt, z.B. die Zeit zwischen zwei Oppositionen.
- Daraus lässt sich die **siderische Umlaufzeit**  $T_{sid}$  ableiten, d.h. die Zeit, die der Planet für einen vollständigen Umlauf um die Sonne benötigt: Im folgenden Bild sind die Positionen von Erde und eines äußeren Planeten an zwei aufeinanderfolgenden Oppositionen dargestellt.



Da zwischen den beiden Positionen gerade die synodische Umlaufzeit  $T_{syn}$  des Planeten vergangen ist, sieht man dem Bild folgende Beziehung an:

$$\Delta\lambda_E = \Delta\lambda_P + 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta\lambda_E}{T_{syn}} = \frac{\Delta\lambda_P}{T_{syn}} + \frac{2\pi}{T_{syn}}$$

Wegen des gleichförmigen Umlaufes von Erde und Planet folgt daraus:

$$\frac{2\pi}{1a} = \frac{2\pi}{T_{sid}} + \frac{2\pi}{T_{syn}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{1a} - \frac{1}{T_{syn}} \quad (2)$$

- Völlig entsprechend lässt sich für die siderische Umlaufzeit eines inneren Planeten ableiten (**Aufgabe!**):

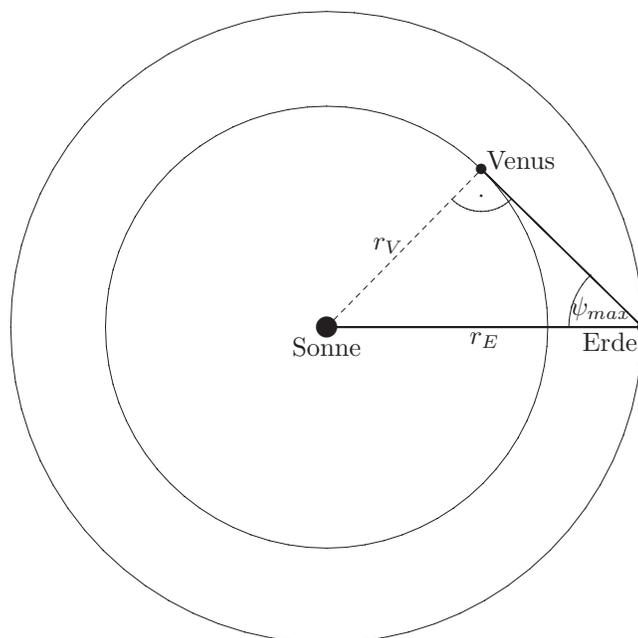
$$\frac{1}{T_{sid}} = \frac{1}{1a} + \frac{1}{T_{syn}} \quad (3)$$

- Auf diese Weise lassen sich die siderischen Umlaufzeiten aller Planeten bestimmen:

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
$T_{syn}$ in d	115.88	583.92	-	779.94	398.9	378.0	369.6	367.5	366.7
$T_{sid}$ in a	0.241	0.615	1.00	1.88	11.87	29.63	84.67	165.5	251.9

## 2.2 Bestimmung der Bahnradien

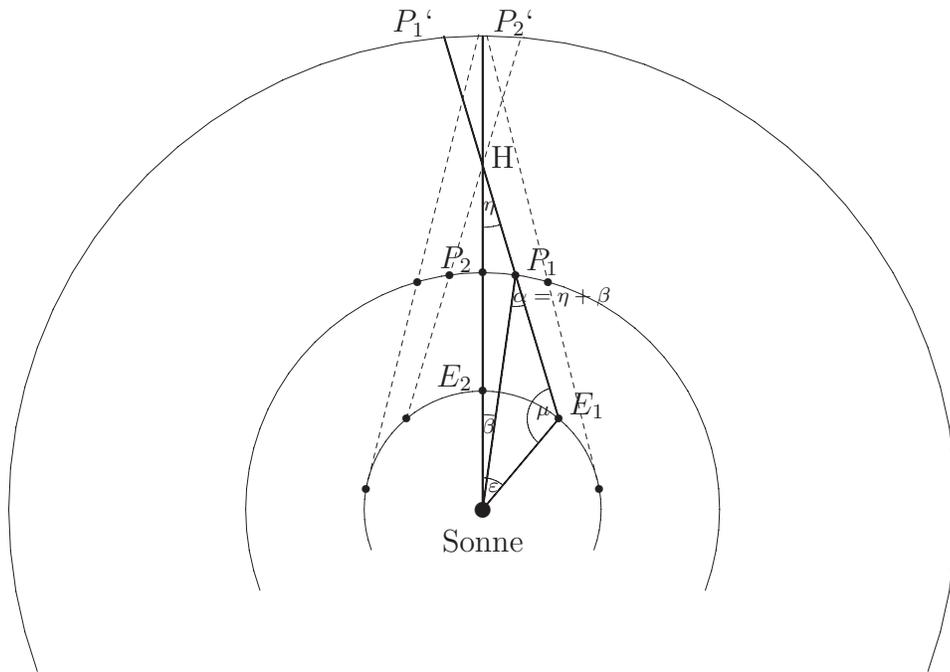
- Für einen inneren Planeten ist der Bahnradius einfach zu bestimmen: Man beobachtet ihn so lange, bis sein Winkelabstand zur Sonne den größten Wert annimmt und misst dann diesen Winkelabstand  $\psi_{max}$  (z.B. mit einem Geodreieck (grob) oder mit einem Sextanten (genau)). An diesem Tag bilden Sonne, Planet und Erde die folgende Konstellation:



Für den Radius der Planetenbahn ergibt sich also:

$$r_P = r_E \sin \psi_{max} \quad (4)$$

- Bei äußeren Planeten ist die Messung des Bahnradius schwieriger. Die einfachste Methode besteht darin, die Position des Planeten am Tage seiner Opposition zu bestimmen und eine weitere Position *während seiner Rückläufigkeit*. Hat der Planet zwischen diesen beiden Beobachtungen den Winkel  $\eta$  am Himmel überstrichen, dann ergibt sich der Bahnradius folgendermaßen:



- Dem Dreieck  $SP_1H$  entnimmt man:  $\alpha = \eta + \beta$ .
- Dem Dreieck  $SE_1H$  entnimmt man:  $\mu + \eta + \eta = 180^\circ$ .
- Damit ergibt sich

$$\frac{r_P}{r_E} = \frac{\sin \mu}{\sin \alpha} = \frac{\sin(180^\circ - (\eta + \varepsilon))}{\sin(\beta + \eta)}$$

oder

$$\frac{r_P}{r_E} = \frac{\sin(\eta + \varepsilon)}{\sin(\eta + \beta)} \quad (5)$$

Die Winkel  $\beta$  und  $\varepsilon$  kann man nicht direkt messen. Man kann sie aber aus der siderischen Umlaufzeit des Planeten, der Jahreslänge und der zwischen den beiden Beobachtungen verflissenen Zeit  $\Delta t$  bestimmen:

$$\beta = \frac{360^\circ}{T_{sid}} \Delta t, \quad \varepsilon = \frac{360^\circ}{1a} \Delta t$$

Auf diese Weise lassen sich die Bahnradien aller Planeten bestimmen:

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
Bahnradius in AE	0.387	0.723	1.0	1.524	5.205	9.576	19.28	30.14	39.88

## 2.3 Übung

- Mars am 16.3.97:  $\lambda_2 = 177^\circ$ , am 16.2.97  $\lambda_1 = 185^\circ$ .

Bestimmen Sie aus dieser zusätzlichen Positionsangabe den Marsbahnradius *in Astronomischen Einheiten*, d.h. als Vielfaches des Erdbahnradius!

**Lösung:**

$$\eta = |\lambda_2 - \lambda_1| = 8.0^\circ,$$

$$\beta = \omega_M 28d = 14.7^\circ,$$

$$\varepsilon = \omega_E 28d = 27.6^\circ$$

und damit

$$r_M = \frac{\sin(8^\circ + 27.6^\circ)}{\sin(8^\circ + 14.7^\circ)} = 1.5AE$$

- **Hausaufgabe:** Bestätigen Sie mit Hilfe der empirisch gewonnenen Daten für Umlaufzeiten und Bahnradien das 3. Kepler'sche Gesetz!
- **Hausaufgabe:** Mars hatte am 29.4.1995 (genau  $T_{sid}=687d$  vor der Opposition am 16.3.97) die geozentrische Länge  $\lambda = 140^\circ$ .

Welche zusätzliche Information lässt sich daraus über die Marsbahn gewinnen?

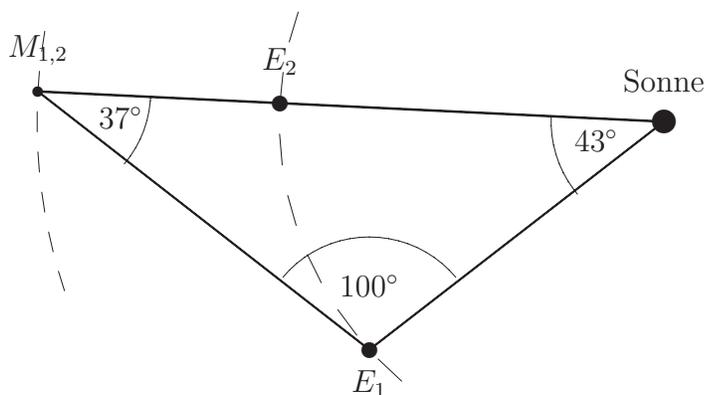
## 3 Keplers Gesetze und das Gravitationsgesetz

### 3.1 Wiederholung

- 3. Kepler'sches Gesetz:
  - Die Bahnradien können durch Winkelmessungen am Himmel bestimmt werden.
  - Die siderischen Umlaufzeiten werden aus den leicht zu beobachtenden synodischen Umlaufzeiten berechnet.
  - Mit den so bestimmten Werten ergibt sich:

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
Bahnradius in AE	0.387	0.723	1.0	1.524	5.205	9.576	19.28	30.14	39.88
$T_{sid}$ in a	0.241	0.615	1.00	1.88	11.87	29.63	84.67	165.5	251.9
$\frac{r^3}{T^2}$ in $\frac{AE^3}{a^2}$	0.998	0.999	1.000	1.002	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000

- Lösung der 2. Aufgabe:
  - Da die Zeitspanne genau eine siderische Umlaufzeit von Mars beträgt, befindet sich Mars an beiden Tagen an genau derselben Stelle.
  - Wegen  $687 = 730.5 - 43.5$  beträgt der Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren der Erde  $43.5d \cdot 0.987^\circ/d = 43.0^\circ$ .
  - Der Winkel zwischen den beiden geozentrischen Marslängen beträgt  $177^\circ - 140^\circ = 37^\circ$ .
  - Die Positionen bilden also folgende Konstellation:



- Der Sinussatz, angewendet auf das Dreieck Sonne - Mars - Erde 1, ergibt deshalb:

$$r_M = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 37^\circ} r_E = 1.64AE \text{ (Lit.: 1.66AE)}$$

- Auf diese Weise hat Kepler die Marsbahn mit Tycho's Beobachtungsdaten genau vermessen. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass über die Form der Marsbahn nichts vorausgesetzt werden muss.

Allerdings müssen die Positionen der Erde genau bekannt sein. Das ist der Grund, warum Kepler seine Arbeit mit der genauen Vermessung der Erdbahn begann.

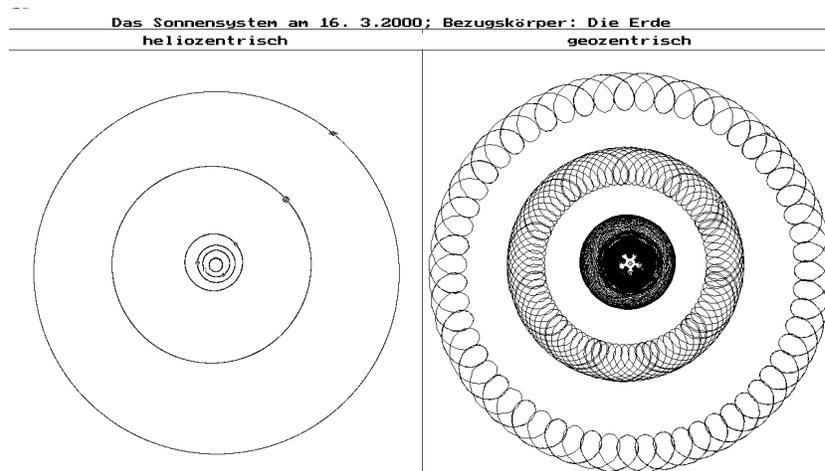
### 3.2 Vergleich zwischen geozentrischer und heliozentrischer Beschreibung

- Offensichtlich ist die heliozentrische Beschreibung der Planetenbewegung mit der Epizykeltheorie *geometrisch äquivalent*:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{E \rightarrow P} &= \vec{r}_{S \rightarrow P} + -\vec{r}_{S \rightarrow E} && \text{(heliozentrische Beschreibung)} \\ &= \vec{r}_{Deferent} + \vec{r}_{Epizykel} && \text{(geozentrische Beschreibung)}\end{aligned}$$

Allerdings ergeben sich zwei wesentliche Einschränkungen für das aus dem heliozentrischen System folgende Epizykelmodell:

1. Alle Epizykel haben dieselbe Größe und werden mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen. (Der Epizykel entspricht ja der Bewegung der Erde um die Sonne!)
  2. Im antiken System ließ sich zwischen den Radien der verschiedenen Deferenten *durch Beobachtung* keine Beziehung herleiten. Im heliozentrischen System ergeben sich die Bahnradien aller Planeten *bis auf einen allen gemeinsamen Faktor*!
- Das Copernicanische führt allerdings zu einer „eleganteren“, „ästhetischeren“ Beschreibung der Welt:



Die Bewegungen der innersten fünf Planeten, heliozentrisch und geozentrisch betrachtet.

- Da Copernicus jedoch am Dogma gleichförmiger Kreisbewegungen festhielt, war sein System in Wirklichkeit nicht einfacher als das Ptolomäische: Für eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Modell und Theorie benötigte er sogar mehr Epizykel, als im modernen Ptolomäischen Modell erforderlich waren!
- Und es sprachen zwei massive Gründe *gegen* die heliozentrische Sichtweise:
  1. Die rasante Bewegung der Erde widersprach nicht nur der Aristotelischen Physik, sondern auch der Anschauung.

2. Die Bewegung der Erde um die Sonne musste sich als parallaktische Bewegung am Sternenhimmel bemerkbar machen. Eine Parallaxe der Fixsterne konnte jedoch nicht beobachtet werden – und konnte es trotz intensivster Bemühungen weitere drei Jahrhunderte nicht!

### 3.3 Kepler und Newton

- Newton benutzte Keplers empirisch gewonnene Gesetze, um die Eigenschaften der Gravitationskraft abzuleiten. Anschließend konnte er zeigen, dass Keplers Gesetze aus seinen drei allgemeinen Gesetzen der Bewegung folgten.
- Diese Ableitung stellt den Höhepunkt von Newtons Leistungen dar: Sie lieferte einerseits eine überwältigende Bestätigung für seine Grundsätze der Mechanik – und damit für seine Auffassung vom Begriff der Kraft. Andererseits gab sie eine theoretische Begründung für Keplers Gesetze: Newton zeigte, *wie das Weltall funktioniert!*
- Die folgenden Überlegungen lehnen sich eng an *Feynmans verschollene Vorlesung über Die Bewegung der Planeten um die Sonne* an ([2]), die er „zur Unterhaltung“ seiner Studenten am Ende eines Semesters gehalten hat.
- Übersicht über die Argumentation:
  - Ausgangspunkt sind die drei Newton’schen Grundsätze der Mechanik:
    - \* Aufgrund des 3. Gesetzes haben die inneren Kräfte zwischen den Teilen eines Himmelskörpers keinen Einfluss auf die Bewegung des Körpers als Ganzes. Zur Untersuchung der Planetenbewegungen muss also nur die Wechselwirkung zwischen Sonne und Planet (und später zwischen den Planeten untereinander) berücksichtigt werden.
    - \* Ohne äußere Kraft würden sich die Planeten geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.
    - \* Wirkt eine Kraft  $\vec{F}$  über eine Zeitspanne  $\Delta t$  auf den Planeten, dann erhält er dadurch eine Zusatzgeschwindigkeit  $\Delta\vec{v}$  in Richtung der wirkenden Kraft, für die gilt:

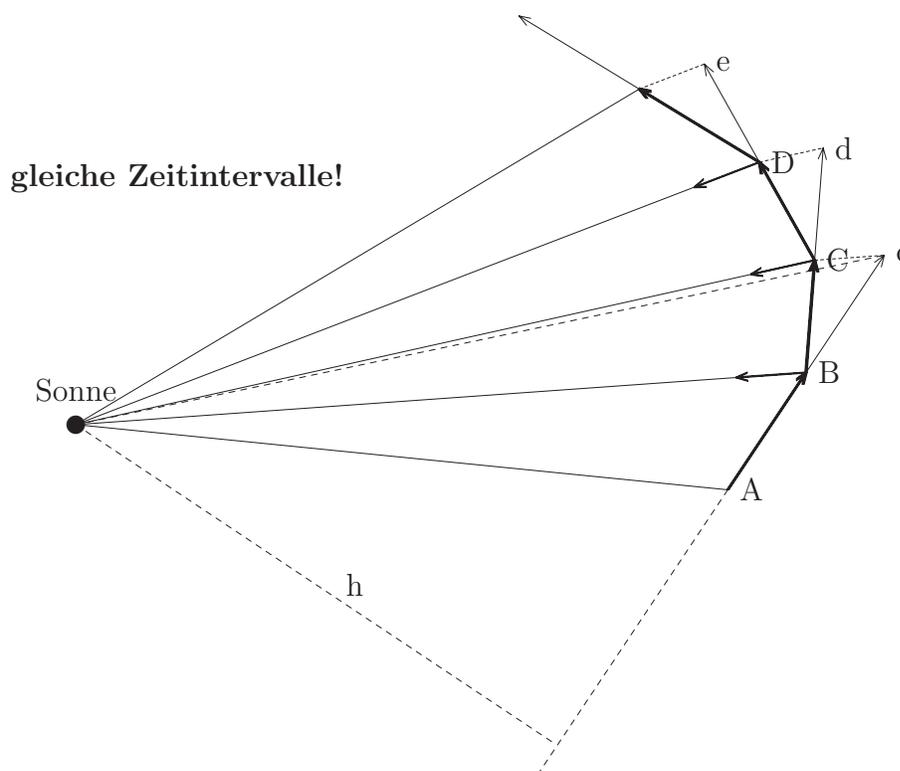
$$\Delta\vec{v} \sim \vec{F}\Delta t \quad (6)$$

- Keplers 2. Gesetz, der Flächensatz, erweist sich als Folge der Tatsache, dass die Gravitationskraft eine *Zentralkraft* ist, also zu einem festen Zentrum, der Sonne, hin gerichtet ist.
- Aus dem 3. Kepler’schen Gesetz folgt, dass die Gravitationskraft mit dem Quadrat des Abstandes abnehmen muss.
- Mit Hilfe des Gravitationsgesetzes und den drei Newton’schen Gesetzen lässt sich nun umgekehrt zeigen (und ich werde es auf die Art und Weise Feynmans tun!), dass die Bahnen der Planeten Ellipsoidgestalt haben müssen.

- Tatsächlich ist die Folgerung viel weitreichender: Es ergeben sich nicht nur die Bewegungen der Planeten um die Sonne, sondern auch die des Mondes um die Erde, die der Jupitermonde um Jupiter und die Störungen, die die Planeten gegenseitig auf ihre Bewegungen ausüben.
- Am wichtigsten aber ist: *Die Bewegungen am Himmel werden denselben Gesetzen unterworfen wie die auf der Erde!*
- Die Newton'schen Überlegungen bildeten damit den Startpunkt für die *Mathematisierung der Naturwissenschaft*. Sie bilden darüberhinaus ein Musterbeispiel für die Wechselbeziehung zwischen Induktion und Deduktion!

### 3.4 Newtons Ableitung des 2. Kepler'schen Gesetzes

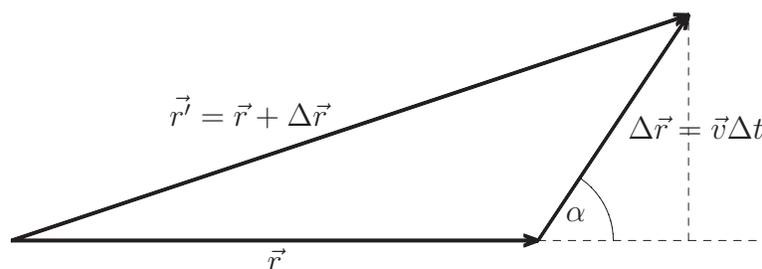
Wie lassen sich nun die Bewegungen untersuchen, die die Planeten aufgrund ihrer Anziehung durch die Sonne um das Zentralgestirn herum ausführen?



- Da es zu Newtons Zeit noch keine Infinitesimalrechnung gab (Newton selbst entwickelte sie, zeitgleich mit, aber unabhängig von Leibniz), ersetzte Newton die kontinuierlich wirkende Anziehungskraft zwischen Sonne und Planet durch diskrete Kraftstöße.
- Ein Planet, der sich in der Zeit  $\Delta t$  mit konstanter Geschwindigkeit von A nach B bewegt, würde sich, ohne von der Sonne angezogen zu werden, im nächsten Zeitintervall aufgrund seiner Trägheit (1. Newton'sches Gesetz) von B nach c bewegen. Durch die Wechselwirkung mit der Sonne erhält er jedoch in B eine Zusatzbewegung *in Richtung auf die Sonne*. Seine tatsächliche Bewegung im zweiten Zeitintervall ist die

Vektorsumme dieser beiden Bewegungen, so dass sich der Planet statt nach  $c$  nach  $C$  bewegt ... Anschließend werden die Zeitintervalle  $\Delta t$  immer kleiner gemacht. Offensichtlich entspricht dieses Vorgehen genau modernen Verfahren zur numerischen Integration von Bewegungsgleichungen, nämlich dem Ganzschritt-Verfahren!

- **Folgerung 1:** *Die Bewegung des Planeten verläuft in einer Ebene, die die Sonne enthält.* Diese Ebene wird von Anfangsradius  $\vec{r}_0$  und Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  aufgespannt, da alle Zusatzgeschwindigkeiten in dieser Ebene liegen, die deshalb niemals vom Planeten verlassen wird.
- Die Dreiecke  $\triangle SAB$  und  $\triangle SBc$  haben denselben Flächeninhalt, weil sie gleichlange Grundseiten ( $AB$  bzw.  $Bc$ ) und dieselbe Höhe  $h$  haben.
- Die Dreiecke  $\triangle SBc$  und  $\triangle SBC$  haben denselben Flächeninhalt, weil sie dieselbe Grundseite  $SB$  haben und weil die Höhe bzgl. dieser Grundseite wegen der Parallelität von  $SB$  und  $Cc$  gleichlang ist.
- Damit haben aber die Dreiecke  $\triangle SAB$  und  $\triangle SBC$  denselben Flächeninhalt.
- **Folgerung 2:** *Alle in gleichen Zeiten vom Radiusvektor überstrichenen Flächen sind gleich groß.* (2. Kepler'sches Gesetz).
- Bei der Ableitung dieser Folgerung wurde nur benutzt, dass die Kraft immer zu demselben Punkt, der Sonne, gerichtet ist: *Der „Flächensatz“ gilt ganz allgemein für Zentralkräfte.*
- Newtons Folgerung war zunächst gerade die umgekehrte: *Damit die Kraft, die die Sonne auf den Planeten ausübt, die von Kepler empirisch abgeleitete Bewegung bewirken kann, muss sie zur Sonne hin gerichtet sein!*
- Mit modernen analytischen Methoden lässt sich der Flächensatz ganz einfach ableiten:



- Die in der Zeit  $\Delta t$  vom Radiusvektor  $\vec{r}$  überstrichene Fläche  $A$  ist

$$A = \frac{1}{2} r \Delta r \sin \alpha = \frac{1}{2} r v \Delta t \sin \alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \Delta t$$

wenn  $\alpha$  der von  $\vec{r}$  und  $\Delta \vec{r}$  eingeschlossene Winkel ist.

- Daraus folgt aber:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \sim |\vec{L}|$$

Dabei ist

$$\vec{L} := m \vec{r} \times \vec{v}$$

der sogenannte **Drehimpuls** des Planeten.

- Wenn nun aber die wirkende Kraft eine Zentralkraft ist, also

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \iff \quad \vec{F} \times \vec{r} = 0$$

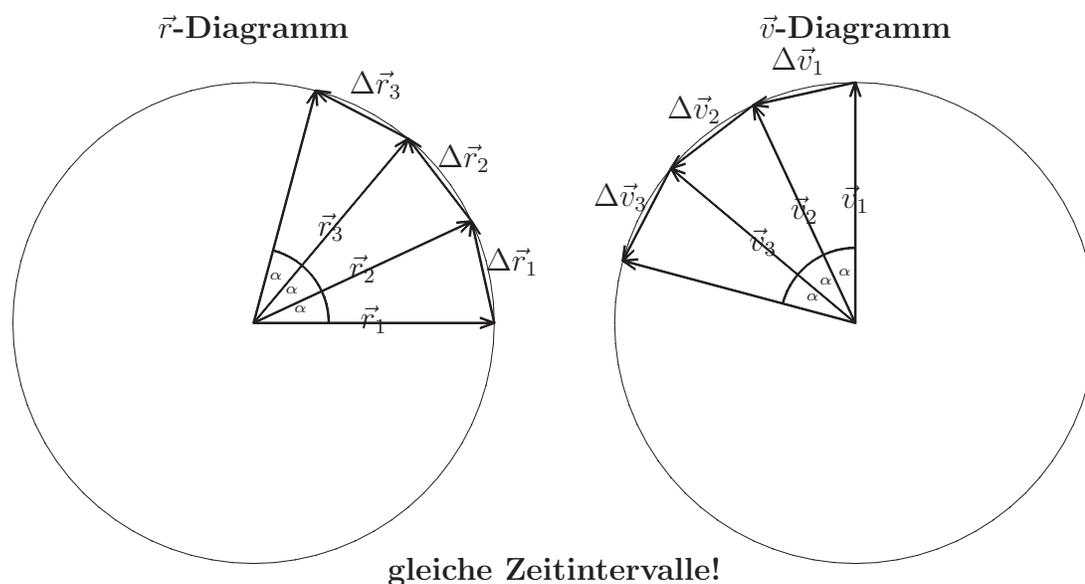
dann folgt:

$$\dot{\vec{L}} \sim \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}} \sim \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

- Also ist der Drehimpuls zeitlich konstant (**Drehimpulserhaltungssatz**). Das heißt aber:
1. Die Bahnebene (d.i. die Ebene, auf der der Drehimpuls senkrecht steht) bleibt konstant: Die Planetenbewegung ist eine ebene Bewegung.
  2. Die „Flächengeschwindigkeit“  $\dot{A}$  ist konstant, der Radiusvektor überstreicht also in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

### 3.5 Keplers 3. Gesetz und das Gravitationsgesetz

- Die quadratische Abstandsabhängigkeit der Gravitationskraft wird für den Spezialfall von Kreisbewegungen abgeleitet.
- Dabei wird eine Gegenüberstellung der Vektordiagramme von Orts- und Geschwindigkeitsvektoren benutzt, die später bei der Ableitung der Bahnform wichtig wird.
- Seien  $\vec{r}_0$  und  $\vec{v}_0$  so, dass  $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_0|$  und  $|\Delta\vec{r}_1| = |\Delta\vec{r}_2|$ . Dann sind diese Bedingungen nach gleichen Zeiten immer wieder erfüllt, und es geben sich regelmäßige Polygone – und im Grenzfall Kreise:



- Aus dem  $\vec{r}$ -Diagramm ergibt sich unmittelbar:

$$\Delta r = \frac{2\pi r}{T} \Delta t \quad \text{und} \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

- Ganz entsprechend ergibt sich aus dem  $\vec{v}$ -Diagramm:

$$\Delta v = \frac{2\pi v}{T} \Delta t$$

- Zusammengenommen folgt daraus:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \sim \frac{r}{T^2}$$

- Zusammen mit Keplers 3. Gesetz ergibt sich daraus aber die gesuchte Abhängigkeit:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{r}{T^2} \\ T^2 \sim r^3 \end{array} \right\} \implies \boxed{F \stackrel{(6)}{\sim} \frac{\Delta v}{\Delta t} \sim \frac{1}{r^2}} \quad (7)$$

- Damit hatte Newton aus dem 3. Kepler'schen Gesetz die quadratische Abnahme der Gravitationskraft mit dem Abstand abgeleitet<sup>1</sup>, eine Ableitung, die vor ihm bereits *Hooke* gefunden hatte.
- Wiederum ist diese Ableitung mit modernen analytischen Methoden ganz leicht:

$$F_Z \sim \frac{v^2}{r} \sim \frac{r}{T^2} \stackrel{\text{3. Kepler'sches Gesetz}}{\sim} \frac{1}{r^2}$$

---

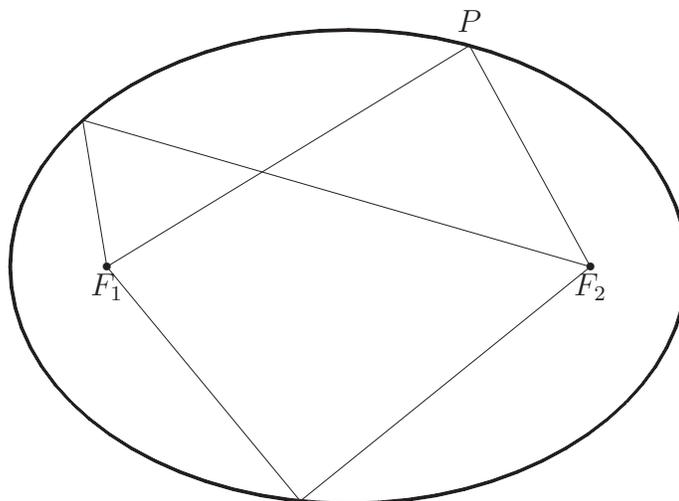
<sup>1</sup>Üblicherweise wird an dieser Stelle die Legende von dem Apfel erzählt, der Newton auf den Kopf fiel und ihn auf die Idee brachte, dass die Kraft, die den Apfel zu Boden fallen lasse, dieselbe sei wie die, die den Mond auf seiner Bahn um die Erde halte. (**Aufgabe:** Vergleichen Sie die Beschleunigungen von Apfel und Mond, und bestätigen Sie so das Gravitationsgesetz!)

## 4 Über Ellipsen

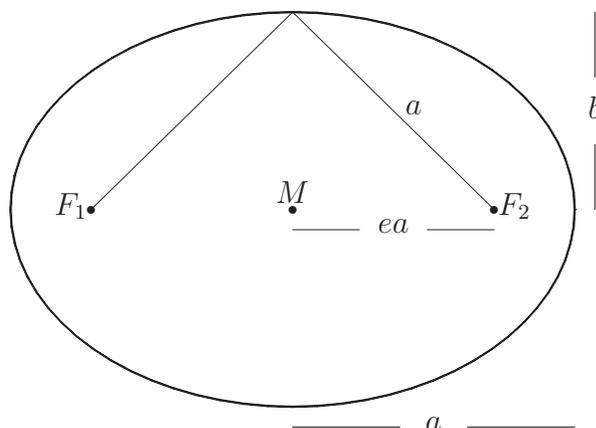
### 4.1 Zur Geometrie der Ellipse

#### 4.1.1 Die “Gärtner-Konstruktion“

- **Definition:** Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte in einer Ebene, für die die Summe der Entfernungen zu zwei festen Punkten dieser Ebene, den sogenannten **Brennpunkten der Ellipse**, immer denselben Wert hat.



- Diese Definition beinhaltet direkt eine Konstruktionsvorschrift, die sogenannte *Gärtner-Konstruktion*: Zwischen zwei festen Punkten wird ein Faden eingespannt, dessen Länge größer ist als der Abstand der beiden Punkte. Mit einem Stift wird so um die beiden Punkte herumgefahren, dass der Faden immer stramm gespannt bleibt.
- Bezeichnen  $F_1$  und  $F_2$  die beiden Brennpunkte,  $M$  den Mittelpunkt,  $a$  bzw.  $b$  große bzw. kleine Halbachse,  $e$  die sogenannte numerische Exzentrizität der Ellipse und  $l$  die Länge des bei der Konstruktion benutzten Fadens,



dann gelten offenbar folgende Zusammenhänge:

$$l = 2a \quad \implies \quad a = \frac{l}{2} \quad (8)$$

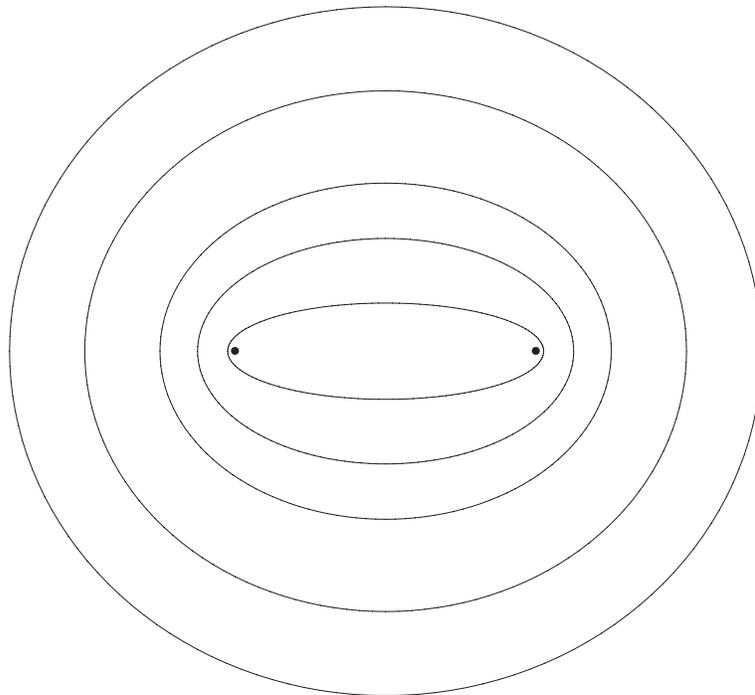
$$b^2 + (ea)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (9)$$

$$\text{oder} \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (10)$$

- Offensichtlich wird bei festen Brennpunkten die entstehende Ellipse umso größer, je größer die Fadenlänge gewählt wird. Genauer: Wird die Fadenlänge vergrößert, liegen alle Punkte der neuen Ellipse *außerhalb* der alten .

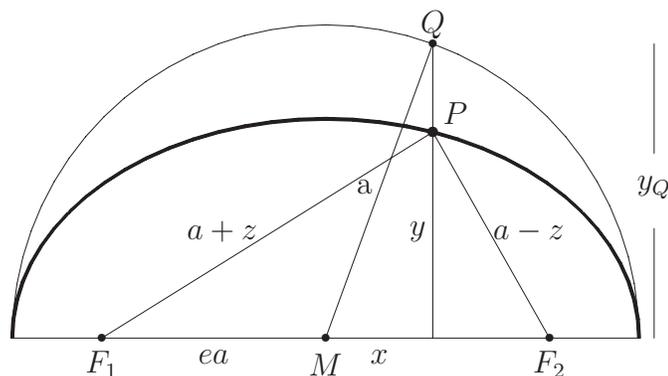
**Aufgabe:** Beweisen Sie diese Aussage!

(**Lösung:** Verbindet man einen Punkt  $P$  außerhalb der Ellipse mit den beiden Brennpunkten, dann schneiden beide Verbindungslinien die Ellipse. Sei  $S$  der Schnittpunkt von  $\overline{F_1P}$  mit der Ellipse. Dann ist die direkte Verbindung von  $S$  nach  $F_2$  kürzer als die über  $P$ . Die Summe der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten ist also von  $S$  kürzer als von  $P$ .)



#### 4.1.2 Die Ellipse als gestauchter Kreis

- Betrachte einen beliebigen Punkt  $P(x, y)$  der Ellipse, dessen Abstände von den beiden Brennpunkten  $a + z$  bzw.  $a - z$  betragen, und dessen Projektion  $Q(x, y_Q)$  auf den Umkreis:



Dann gilt offensichtlich:

$$y^2 = (a+z)^2 - (ea+x)^2$$

und

$$y^2 = (a-z)^2 - (ea-x)^2$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf:

$$2az - 2eax = -2az + 2eax$$

$$\implies z = ex$$

Damit folgt aber:

$$y^2 = (a+ex)^2 - (ea+x)^2 = a^2(1-e^2) - x^2(1-e^2)$$

$$\stackrel{(9)}{=} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}y_Q^2$$

$$\implies y = \frac{b}{a}y_Q \tag{11}$$

Jeder durch die Gärtner-Konstruktion gewonnene Punkt liegt also um den Faktor  $\frac{b}{a}$  näher an der großen Halbachse als seine Projektion auf den Umkreis.

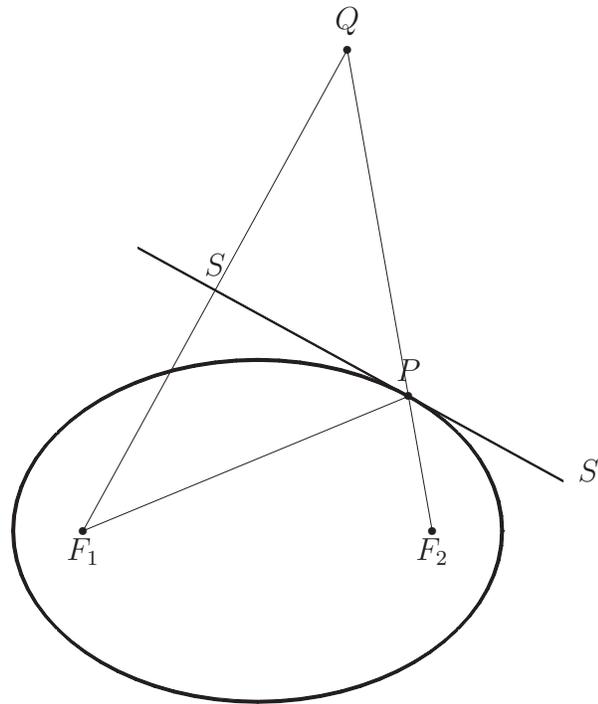
- **Aufgabe:** Zeigen Sie, dass auch die umgekehrte Richtung gilt: Für jeden Punkt, der dadurch entsteht, dass die  $y$ -Koordinate eines Punktes des Umkreises um den Faktor  $\frac{b}{a}$  gestaucht wird, ist die Summe der Entfernungen von den beiden Brennpunkten  $F_1 = (-ea, 0)$  und  $F_2 = (ea, 0)$  mit  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  dieselbe, nämlich gleich  $2a$ .
- Die Ellipse ist also ein um den Faktor  $\frac{b}{a}$  gestauchter Kreis. Für ihren Flächeninhalt gilt also:

$$A_{\text{Ellipse}} = \pi ab$$

(12)

## 4.1.3 Die „Spiegel-Konstruktion“

- Man zeichne durch einen beliebigen Punkt  $P$  der Ellipse einen Spiegel  $SS'$ , der Licht von  $F_1$  über  $P$  nach  $F_2$  reflektiert:

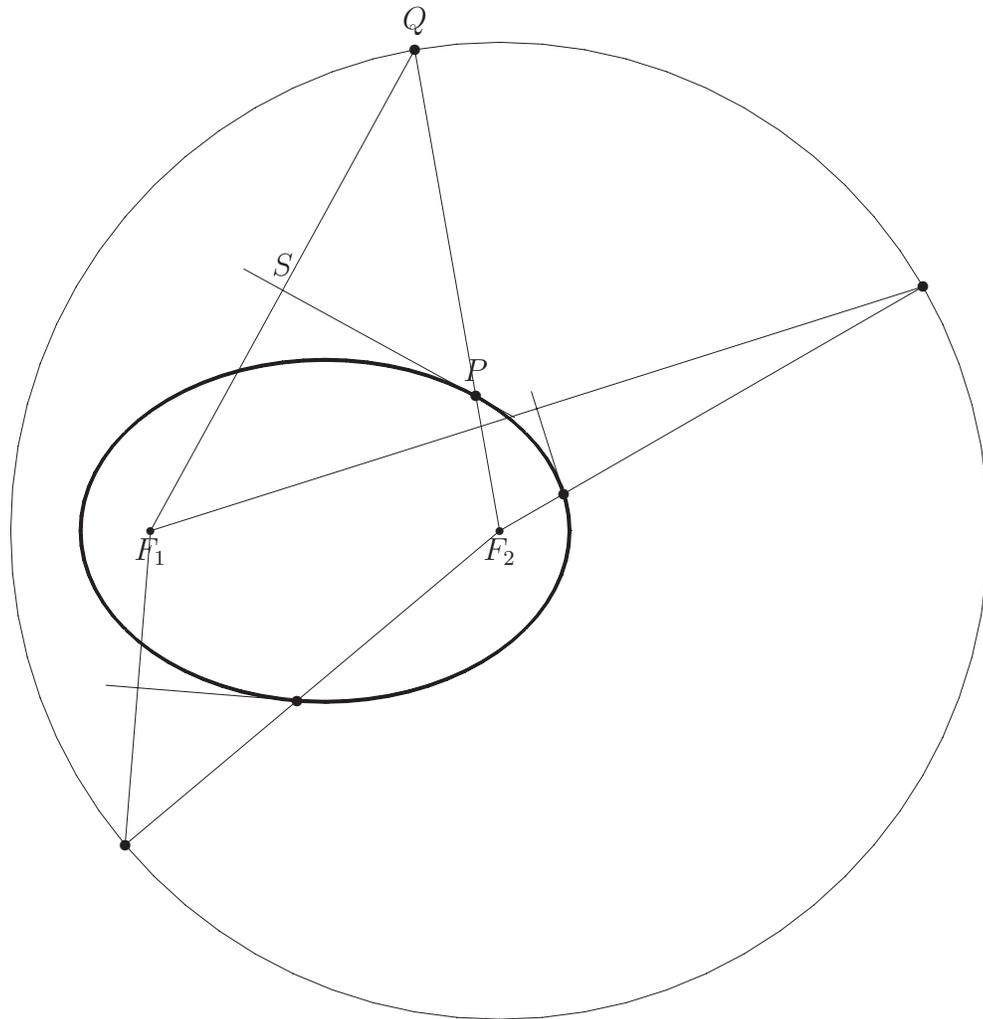


Sei  $Q$  das Spiegelbild von  $F_1$ . Dann ist die Linie  $\overline{F_2P} + \overline{PQ}$  eine Gerade und  $P$  der Punkt des Spiegels, für den die Summe  $d(F_2P) + d(PQ)$  der Entfernungen nach  $F_2$  und  $Q$  am kleinsten ist. Diese Summe ist aber gleich der Summe der Entfernungen nach  $d(PF_2) + d(PF_1) = l$ ! Für alle anderen Punkte  $P'$  des Spiegels ist also  $\overline{F_1P'} + \overline{P'F_2}$  größer als  $l$  (**Fermatsches Prinzip!**). Sie liegen also außerhalb der Ellipse (s. S. 21). *Der Spiegel  $SS'$  ist also die Tangente durch  $P$  an die Ellipse.*

- Seien umgekehrt die Gerade  $SS'$  die Tangente durch  $P$  an die Ellipse und  $Q$  der Bildpunkt von  $F_1$  bezüglich der Tangente. Da alle Punkte  $P' \neq P$  der Tangente außerhalb der Ellipse liegen, ist die Summe der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten für  $P$  die kleinste von allen Punkten  $P'$  der Tangente.

Für  $P$  ist deshalb auch die Summe der Entfernungen  $d(F_2P) + d(PQ)$  am kleinsten. Das Polygon  $\overline{F_2P} + \overline{PQ}$  ist demzufolge eine Gerade! Weil  $Q$  das Spiegelbild von  $F_1$  ist, sind die Winkel  $\angle F_1PS$  und  $\angle QPS$  gleich groß. Als Scheitelwinkel sind aber auch die Winkel  $\angle QPS$  und  $\angle F_2PS'$  gleich groß. Also sind die Winkel  $\angle SPF_1$  und  $\angle S'PF_2$  gleich groß, und Licht, das entlang  $F_1P$  auf die Tangente fällt, wird nach  $F_2$  reflektiert. *Die Tangente reflektiert also von  $F_1$  kommendes Licht nach  $F_2$ .*

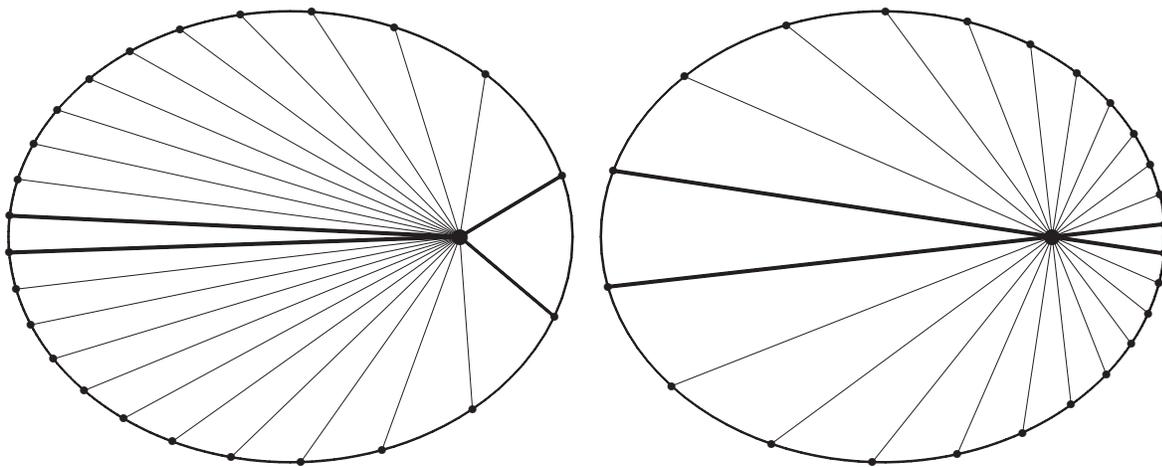
- Folgerung: *Alle von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen werden vom Umfang der Ellipse so reflektiert, dass sie durch den anderen Brennpunkt gehen!*



- Damit ergibt sich aber eine Konstruktionsvorschrift für die Ellipse: Für alle Punkte  $Q$  mit gleichem Abstand  $l$  von  $F_2$  (also auf dem Kreis mit Radius  $l$  um  $F_2$ ) errichte man die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $\overline{QF_1}$ . Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit der Geraden  $F_2Q$  ist dann ein Punkt der Ellipse und die Mittelsenkrechte eine Tangente an die Ellipse.

## 4.2 Die Ellipsenform der Planetenbahnen 1

- Bei der Untersuchung der Bahnform weicht Feynman von Newton ab, indem er *statt gleicher Zeitintervalle gleiche Zentralwinkel* betrachtet:



Dadurch sind die entstehenden Flächen natürlich nicht mehr gleich groß, sondern umso größer, je weiter der Planet von der Sonne entfernt ist. Damit sind aber auch die benötigten Zeiten um so größer, je größer der Abstand zwischen Sonne und Planet ist.

- Tatsächlich sind die entstehenden Dreiecke wegen des gleich großen Spitzenwinkels alle ähnlich<sup>2</sup>. Die Höhen dieser Dreiecke sind proportional zu  $r$  und deshalb, nach dem 2. Strahlensatz, auch die Grundseiten. Für die Flächen  $A_{\Delta}$  dieser Dreiecke gilt deshalb:

$$A_{\Delta} \sim r^2.$$

- Da in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstrichen werden (2. Kepler'sches Gesetz), sind deshalb die zugehörigen Zeitintervalle  $\Delta t$  proportional zu den Flächen, also

$$\Delta t \sim r^2.$$

- Da die auf den Planeten ausgeübte Kraft aber mit dem Quadrat des Abstandes von der Sonne abnimmt (Gravitationsgesetz), ist also

$$\Delta v \sim F \Delta t \sim \frac{1}{r^2} r^2 \implies \Delta v = \text{const}$$

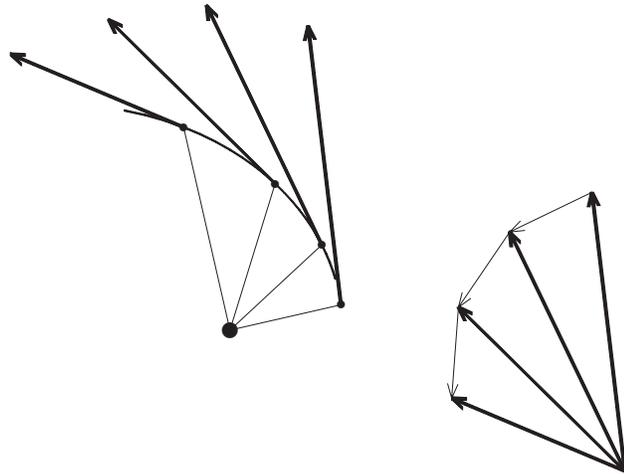
Das ist der entscheidende Ausgangspunkt für die Konstruktion der Bahn:

*Bei gleichen Zentralwinkeln sind alle Zusatzgeschwindigkeiten  $\Delta \vec{v}_i$  gleich lang.*

- Damit kann die Newton'sche Konstruktion nun für gleiche Zentralwinkel wiederholt werden:

---

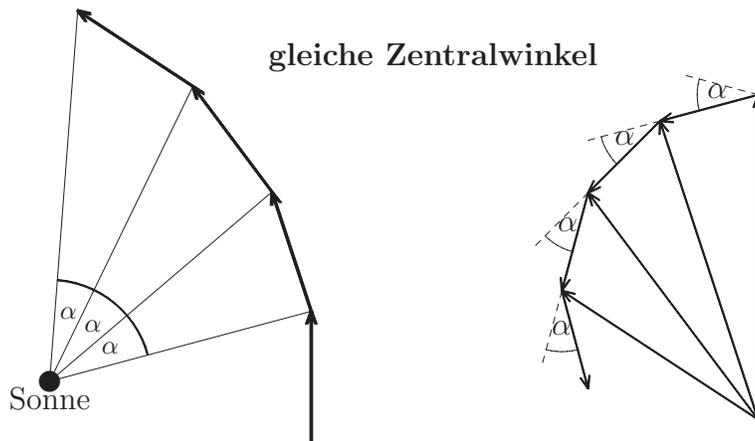
<sup>2</sup>Das gilt nicht genau, aber umso genauer, je kleiner die Winkel gewählt werden.



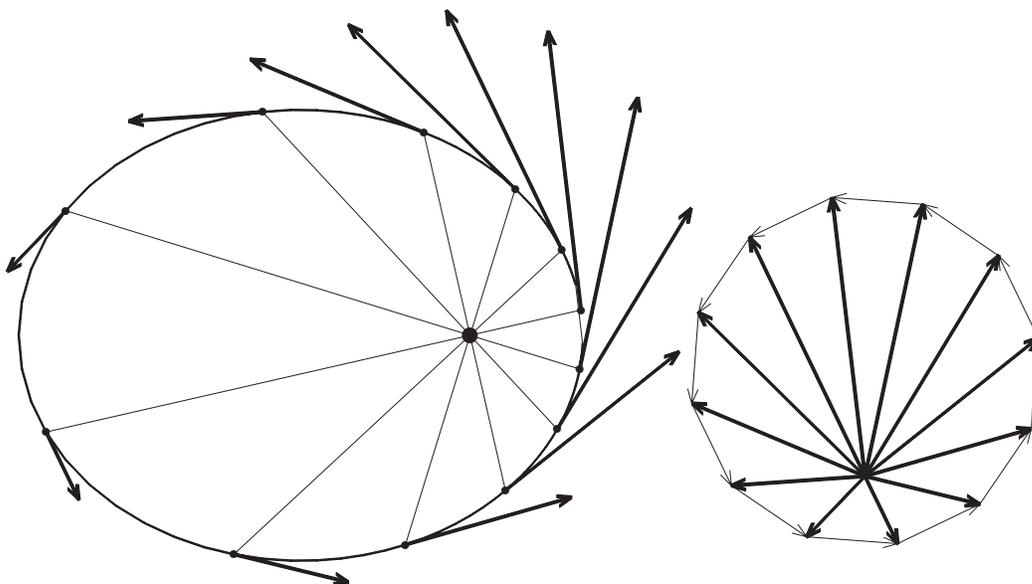
- Da die Zusatzgeschwindigkeiten  $\Delta v_i$  aber alle parallel zu den Radiusvektoren  $\vec{r}_i$  sind, bilden auch sie alle denselben Winkel miteinander:

$\vec{r}$ -Diagramm

$\vec{v}$ -Diagramm



- Die  $\Delta v_i$  bilden also ein regelmäßiges Polygon, das in einen (im Allgemeinen exzentrischen!) Kreis übergeht.

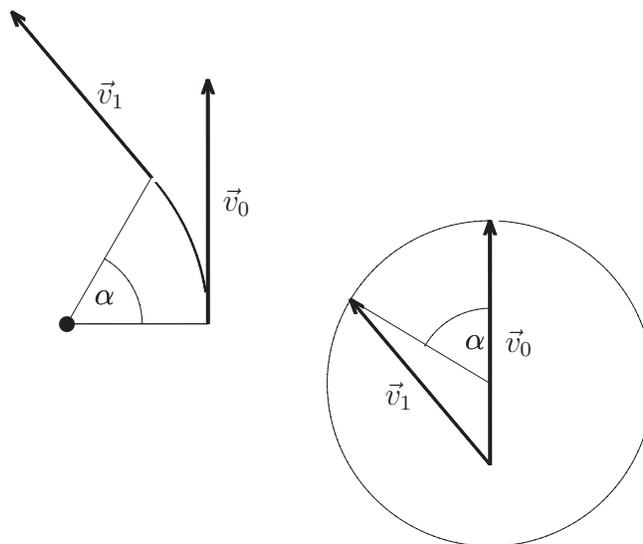


## 5 Newton und die Kepler-Ellipsen

### 5.1 Die Ellipsenform der Planetenbahnen 2

- Wir beginnen zum Zeitpunkt des **Periheldurchganges** des Planeten, zu dem er der Sonne am nächsten ist. Damit haben wir folgende Situation:

Wenn der Zentralwinkel  $\alpha$  überstrichen worden ist, dann hat sich die Zusatzgeschwindigkeit  $\Delta\vec{v}$  um denselben Winkel gedreht. Damit ist aber auch der Zentralwinkel im Geschwindigkeitsdiagramm  $\alpha$ . Wenn wir den Radius, und damit den Mittelpunkt, des Kreises im Geschwindigkeitsdiagramm zunächst willkürlich (siehe jedoch (13)!) annehmen, kennen wir auch Größe und Richtung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ .

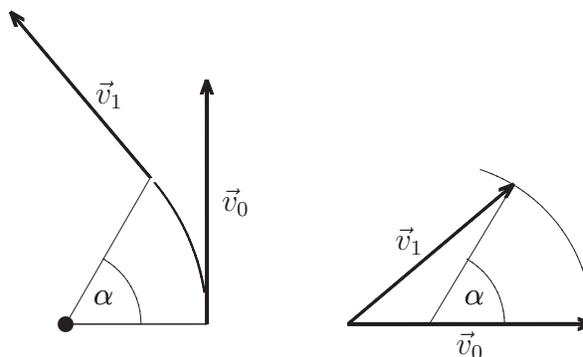


In diesen beiden Diagrammen sind die Geschwindigkeitsvektoren parallel zueinander. Die Radien dagegen stehen senkrecht aufeinander, weil sie im Geschwindigkeitsdiagramm senkrecht auf den zugehörigen Vektoren  $\Delta\vec{v}$  sind, die ihrerseits dieselbe Richtung haben wie die Radiusvektoren im Ortsdiagramm.

Wir kennen also die Richtung des Radiusvektors  $\vec{r}$  und Größe und Richtung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , d.h. wir kennen die Richtung der Tangente an die Bahnkurve.

*Wie können wir mit Hilfe dieses Wissens die Bahnform konstruieren?*

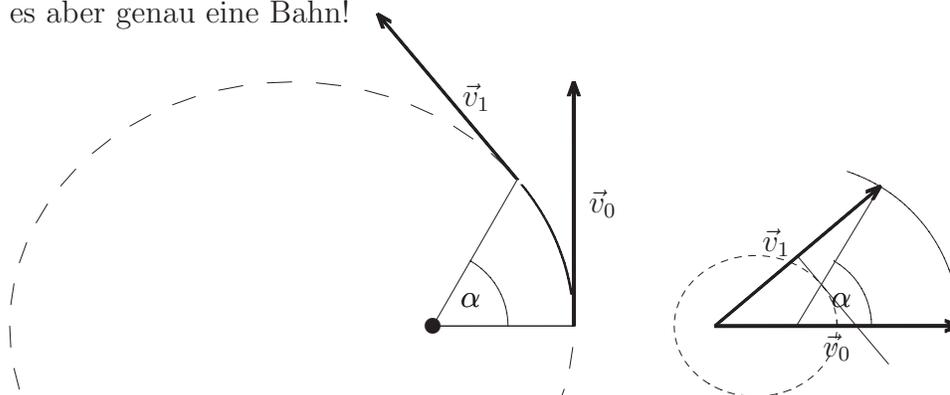
- Feynman betont, dass dies für ihn die schwierigste Stelle war. Die entscheidende Idee war dann, das Geschwindigkeitsdiagramm um  $90^\circ$  zu drehen:



Nun sind die Radien in dem  $\vec{v}$ -Diagramm parallel zu den entsprechenden Radiusvektoren  $\vec{r}$ , und alle Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}$  stehen dagegen senkrecht auf der Tangente an die Bahnkurve – und sie gehen von einem Punkt aus.

*Wir kennen aber bereits eine Bahnkurve, die sich bei dieser Konstruktion ergibt: eine Ellipse!*

Die Ellipse entsteht zunächst im  $\vec{v}$ -Diagramm, kann dann aber, mit dem richtigen Maßstabsfaktor, in das Ortsdiagramm übertragen werden. Die so entstandene Bahnkurve erfüllt alle gestellten Bedingungen. Aufgrund der Newton'schen Konstruktion (modern: wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen) gibt es aber genau eine Bahn!



- Damit sind wir aber am Ziel:

**Die sich aus den Newton'schen Gesetzen und dem Gravitationsgesetz ergebende Form der Planetenbahnen ist eine Ellipse!**

- Tatsächlich ist in die Konstruktion eine Voraussetzung eingeflossen: Von den gewählten Anfangsbedingungen her ist klar, dass  $|\vec{v}_0|$  maximal ist. Der Ausgangspunkt der Geschwindigkeitsvektoren im Geschwindigkeitsdiagramm muss sich also senkrecht unter dem Kreismittelpunkt befinden.

*Unklar ist dagegen, wie weit er vom Mittelpunkt entfernt ist!*

- Die Lage des Mittelpunktes im  $\vec{v}$ -Diagramm kann aber leicht berechnet werden:
  - Durch die Anfangsbedingungen sind Anfangswerte von Radius  $r_0$ , Gravitationskraft  $F_0$  und Geschwindigkeit  $v_0$  festgelegt.

- Für einen zunächst willkürlich gewählten kleinen Winkel  $\alpha \ll 2\pi$  ergibt sich die zugehörige (konstante!) Geschwindigkeitsänderung  $\Delta v$  gemäß

$$\alpha = \frac{v_0 \Delta t}{r_0} \implies \Delta t = \frac{\alpha r_0}{v_0} \implies \Delta v = \frac{F_0}{m} \Delta t = \frac{F_0}{m} \frac{\alpha r_0}{v_0}$$

- Daraus ergibt sich der Radius  $r_v$  im  $\vec{v}'$ -Diagramm zu

$$r_v = \frac{U_v}{2\pi} = \frac{n \Delta v}{2\pi} = \frac{2\pi \Delta v}{\alpha 2\pi} = \frac{\Delta v}{\alpha} = \frac{F_0 r_0}{m v_0}$$

Der Radius ist also, wie es sein muss, unabhängig von der Wahl von  $\alpha$ !

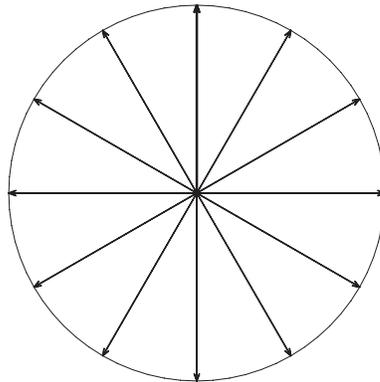
$$\mathbf{r}_v = \frac{\mathbf{F}_0 \mathbf{r}_0}{\mathbf{m} \mathbf{v}_0} \quad (13)$$

- Für verschiedene Radien  $r_v$  – und damit Positionen des Mittelpunktes – im  $\vec{v}'$ -Diagramm ergeben sich verschiedene Bahnformen:

1. Radius und Anfangsgeschwindigkeit *stimmen überein*: Die Planetenbahn ist ein **Kreis** ( $e = 1$ , s. Gleichung (16), S. 31).

$$r_v = v_0 \iff m \frac{v_0^2}{r_0} = F_0 \quad (14)$$

Die Gravitationskraft erzeugt gerade die erforderliche Zentripetalkraft<sup>3</sup>!

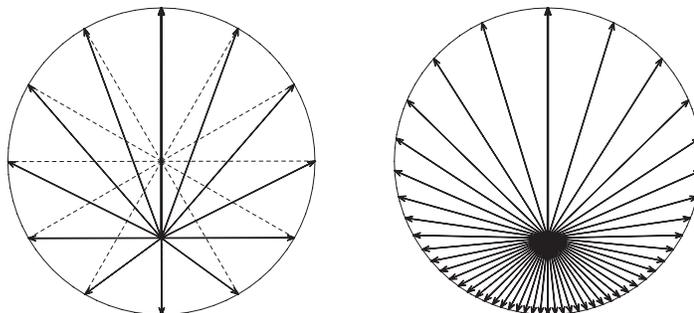


2. Der Radius ist *größer* als die halbe Anfangsgeschwindigkeit; der Ausgangspunkt aller Geschwindigkeitsvektoren liegt *innerhalb des Kreises*. Die Größe der Geschwindigkeit des Planeten variiert, bleibt aber größer als null: Die Bahn ist eine **Ellipse** ( $e < 1$ , s. Gleichung (16), S. 31). In diesem Fall gilt:

$$r_v > \frac{v_0}{2} \iff \frac{v_0^2}{2} < \frac{F_0}{m} r_0 \iff \frac{m}{2} v_0^2 - \gamma \frac{mM}{r_0} = E_{kin} + E_{pot} < 0 \quad (15)$$

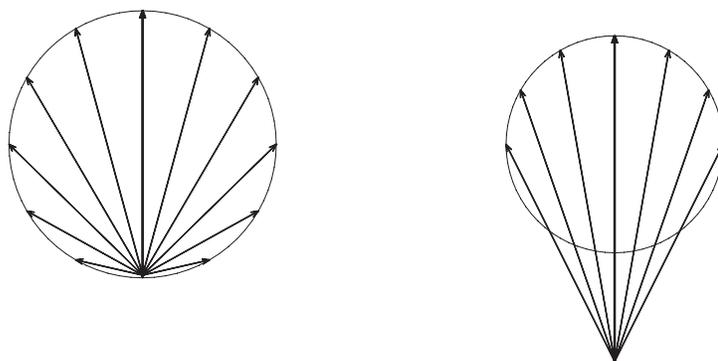
<sup>3</sup>Die folgenden Grafiken haben alle denselben Maßstab. Sie tragen damit dem durch (13) formulierten Gesichtspunkt Rechnung, dass  $r_v v_0 = const$  gelten muss.

In diesem Fall ist die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie, die Gesamtenergie des Planeten also, negativ: *Der Planet ist an die Sonne gebunden.*



Die Vektoren in der linken Zeichnung wurden mit konstant zunehmenden Zentralwinkel, in der rechten dagegen mit konstanten Zeitintervallen konstruiert!

3. Der Radius ist *gleich* der halben Anfangsgeschwindigkeit, d.h. der Ausgangspunkt aller Geschwindigkeitsvektoren liegt *exakt auf dem Kreis*: Bei Annäherung an diesen Punkt nimmt die Geschwindigkeit auf null ab. Dabei dreht sie sich um  $90^\circ$  gegen die Anfangsgeschwindigkeit. Die Gesamtenergie ist null, der Planet ist nicht mehr an die Sonne gebunden und verschwindet im Unendlichen. Seine Bahn ist eine **Parabel**.



4. Der Radius ist *kleiner* als die halbe Anfangsgeschwindigkeit, d.h. der Ausgangspunkt liegt *außerhalb des Kreises*. In diesem Fall ergibt sich eine **Hyperbel** ( $e > 1$ , s. Gleichung (16), S. 31). Die Richtungen der Asymptoten sind durch die Richtungen der Tangenten vom Ausgangspunkt an den Kreis im  $\vec{v}$ -Diagramm gegeben: Bei Annäherung an die Berührungspunkte bleibt die Geschwindigkeit endlich. Da aber die Richtung der Zusatzgeschwindigkeit  $\Delta\vec{v}$  mit der Richtung der Geschwindigkeit übereinstimmt (genauer: ihr entgegengerichtet ist) ändert sich die Geschwindigkeit nicht mehr. Der Planet entflieht mit endlicher Geschwindigkeit in eine wohldefinierte Richtung: Er ist nicht mehr gebunden, seine Gesamtenergie ist positiv.

- Damit kann das Ergebnis allgemeiner formuliert werden:

**Die sich aus den Newton'schen Gesetzen und dem Gravitationsgesetz ergebenden Bahnformen sind Kegelschnitte.**

- Da die Bahnkurve im Ortsraum bis auf einen Maßstabsfaktor mit der sich ergebenden Ellipse im  $\vec{v}'$ -Diagramm übereinstimmt, lassen sich auch die Parameter der Bahn leicht berechnen, wenn der Radius  $r_v$  nach (13), und damit das Verhältnis  $\frac{v_0}{r_v}$  bekannt ist:

**Exzentrizität** Der Radius  $r_v$  entspricht der Fadenlänge bei der Spiegelkonstruktion ( $r_v \sim 2a$ ), der Abstand zwischen Kreismittelpunkt und Anfangspunkt der Geschwindigkeitsvektoren dem Abstand der beiden Brennpunkte ( $v_0 - r_v \sim 2ea$ ):

$$e = \frac{2ea}{2a} = \frac{v_0 - r_v}{r_v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \frac{v_0}{r_v} - 1} \quad (16)$$

**große Halbachse** Der Anfangsabstand entspricht dem Perihelabstand, also  $r_0 = a(1 - e)$ . Also:

$$a = \frac{r_0}{1 - e} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{r_0}{2 - \frac{v_0}{r_v}}} \quad (17)$$

**Gesamtenergie** Das Verhältnis  $\frac{v_0}{r_v}$  ist ein Maß für das Verhältnis aus kinetischer und potentieller Energie:

$$(13) \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{r_v} = \frac{mv_0^2}{F_0 r_0} = -\frac{2E_{kin}}{E_{pot}} \quad (18)$$

Einsetzen in (17) ergibt:

$$a = \frac{r_0}{2} \frac{1}{1 - \frac{v_0}{2r_v}} = \frac{r_0}{2} \frac{E_{pot}}{E_{kin} + E_{pot}} = -\gamma \frac{mM}{2} \frac{1}{E_{ges}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{aE_{ges} = const}$$

Die große Halbachse ist also nur von der Gesamtenergie des Planeten abhängig. Sie wird umso größer, je größer die Gesamtenergie (je kleiner also ihr Betrag) wird.

**Umlaufzeit** Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich zunächst die Flächengeschwindigkeit  $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ :

$$\Delta A = \frac{r_0 v_0 \Delta t}{2} \implies \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r_0 v_0}{2}$$

Daraus kann leicht die Umlaufzeit berechnet werden:

$$\begin{aligned} T &= \frac{A_{Ell}}{\frac{\Delta A}{\Delta t}} = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} \\ &= \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0} \sqrt{1 - e^2} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann mit den Gleichungen (16) und (17) ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2 a^4}{r_0^2 v_0^2} (1 - e^2) \\ &\stackrel{r_0 = a(1-e)}{=} \frac{4\pi^2 a^3}{r_0 v_0^2} (1 + e) \\ &\stackrel{(16)}{=} \frac{4\pi^2 a^3}{r_v v_0} \\ &\stackrel{(13)}{=} \frac{4\pi^2 m}{F_0 r_0^2} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3 \end{aligned}$$

Damit hat sich nebenbei die *allgemeine* Ableitung des 3. Kepler'schen Gesetzes ergeben!

Damit ist letztlich auch die Umlaufzeit berechenbar:

$$\begin{aligned} T^2 &\stackrel{(17)}{=} \frac{4\pi^2}{\gamma M} \left[ \frac{r_0}{2 - \frac{v_0}{r_v}} \right]^3 \stackrel{(13)}{=} \frac{4\pi^2}{\gamma M} \left[ \frac{r_0}{2 - \frac{m v_0^2}{F_0 r_0}} \right]^3 \\ &\implies \boxed{T = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \left[ \frac{r_0}{2 - \frac{r_0 v_0^2}{\gamma M}} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (19) \end{aligned}$$

Damit sind alle Bahnparameter bestimmt *unter der Voraussetzung, dass  $F_0$  bzw.  $\gamma M$  bekannt ist*. Diese Kenntnis kann ersetzt werden durch die Konstante im 3. Kepler'schen Gesetz, d.h. durch Umlaufzeit und große Halbachse eines anderen Planeten.

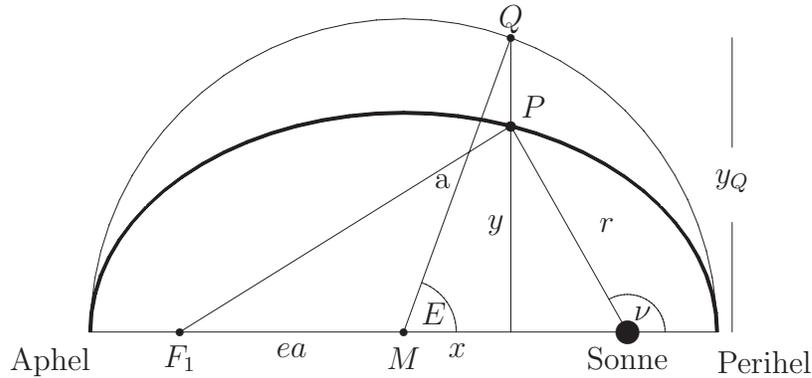
## 5.2 Kepler-Bewegung

Nachdem nun die Gestalt der Planetenbahnen verstanden ist, muss abschließend noch der zeitliche Verlauf der Bewegung beschrieben und vorhergesagt werden: *An welchem Ort seiner Bahn befindet sich der Planet zu einem bestimmten Zeitpunkt?*

Um diese Frage schließlich (mit der sogenannten *Kepler-Gleichung*) beantworten zu können, müssen zunächst noch weitere Eigenschaften von Ellipsen untersucht werden.

## 5.2.1 Weitere geometrische Aspekte der Ellipse

- Der vom Brennpunkt  $F_2$  (Sonne) aus gemessene Winkel zwischen nächstem Punkt der Ellipse (**Perihel**) und Planetenort  $P$  heißt **wahre Anomalie**  $\nu$ . Der vom Mittelpunkt der Ellipse aus gemessene Winkel zwischen Perihel und dem Projektionspunkt  $Q$  von  $P$  nennt man die **exzentrische Anomalie**  $E$ :



Für diese beiden Winkel gelten offensichtlich die folgenden Zusammenhänge:

$$\sin E = \frac{\frac{a}{b}y}{a} = \frac{y}{b} \quad \text{und} \quad r \sin \nu = y$$

$$\implies r \sin \nu = b \sin E \stackrel{(9)}{=} a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (20)$$

$$\implies \sin E = \frac{r \sin \nu}{a\sqrt{1-e^2}} \quad (21)$$

und

$$\cos E = \frac{x}{a} \quad \text{und} \quad -r \cos \nu = ea - x$$

$$\implies r \cos \nu = a(\cos E - e) \quad (22)$$

$$\implies \cos E = \frac{r}{a} \cos \nu + e \quad (23)$$

- Gesucht ist nun die **Polargleichung der Bahn**, d.h. der Abstand des Planeten von der Sonne als Funktion der wahren Anomalie  $\nu$ :

$$r = r(\nu)$$

Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen (21) und (23) ergibt (Dabei wird  $p := a(1 - e^2)$  eingeführt.):

$$a^2(1 - e^2) = r^2 \sin^2 \nu + r^2 \cos^2 \nu (1 - e^2) + 2ea(1 - e^2)r \cos \nu + e^2 a^2 (1 - e^2)$$

$$\iff ap = r^2 - e^2 r^2 \cos^2 \nu + 2epr \cos \nu + e^2 ap$$

$$\iff 0 = r^2 - (er \cos \nu - p)^2$$

$$\implies r = p - er \cos \nu$$

Also:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}} \quad \text{mit} \quad \boxed{p := a(1 - e^2)} \quad (= r(\nu = \frac{\pi}{2})) \quad (24)$$

Diese Polardarstellung gilt nicht nur für Ellipsen ( $e < 1$ ), sondern auch für Parabeln ( $e = 1$ ) und Hyperbeln ( $e > 1$ ).

- Schließlich soll noch der folgende Zusammenhang zwischen wahrer und exzentrischer Anomalie nachgewiesen werden:

$$\boxed{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} = \tan \frac{\nu}{2}} \quad (25)$$

Dazu benutzen wir (mal wieder)

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

- Nun denn:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} &= \frac{(1+e)(1 - (\cos E - e) - e)}{\sqrt{1-e^2} \sin E} \\ \stackrel{(20),(22)}{=} & \frac{(1-e^2) - (1+e)\frac{r}{a} \cos \nu}{\frac{r}{a} \sin \nu} \\ &= \frac{p - (1+e)r \cos \nu}{r \sin \nu} \\ \stackrel{(24)}{=} & \frac{r(1+e \cos \nu) - (1+e)r \cos \nu}{r \sin \nu} \\ &= \frac{1 - \cos \nu}{\sin \nu} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

### 5.2.2 Die Kepler-Gleichung

Nun kennen wir alle geometrischen Aspekte. Es fehlt noch die Dynamik, d.h. das Verhalten in der Zeit, m.a.W.: Wir suchen die Funktion, die die wahre Anomalie als Funktion der Zeit darstellt:

$$\nu = \nu(t)$$

Dazu gehen wir in drei Schritten vor:

1. Zunächst bestimmen wir die überstrichene Fläche als Funktion der Zeit:

$$A = A(t)$$

2. Dann berechnen wir den Zusammenhang der überstrichenen Fläche  $A$  mit der exzentrischen Anomalie  $E$

$$A = f(E),$$

den wir allerdings nur numerisch nach  $E$  auflösen können:

$$E = f^{-1}(A) \quad (\text{Kepler-Gleichung})$$

Dadurch haben die Zunahme der exzentrischen Anomalie mit der Zeit:

$$E = E(t)$$

3. Das ermöglicht uns schließlich, mit Hilfe von (25) die wahre Anomalie als Funktion der Zeit zu berechnen:

$$\nu = \nu(t)$$

Nun denn:

1. Der Zusammenhang zwischen der Zeit und der überstrichenen Fläche ist einfach: Nach dem 2. Kepler'schen Gesetz überstreicht der Radiusvektor Sonne-Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen. In der seit dem Periheldurchgang vergangenen Zeit  $t$  wurde die Fläche  $A(t)$  zwischen Perihel, Sonne und Planet überstrichen. Diese ist dann

$$A(t) = \frac{A_{\text{Ellipse}}}{T} t \stackrel{(12)}{=} \frac{\pi ab}{T} t = \frac{ab}{2} \frac{2\pi}{T} t$$

Die Fläche nimmt also proportional zur Zeit zu. Häufig wird das mit Hilfe eines fiktiven Winkels ausgedrückt, der in einer Periode gleichmäßig um  $2\pi$  wächst:

$$A = \frac{ab}{2} M \quad \text{mit} \quad \boxed{\text{mittlere Anomalie } M := \frac{2\pi}{T} t} \quad (26)$$

2. Die vom Leitstrahl Sonne-Planet seit dem Periheldurchgang überstrichene Fläche  $A(t)$  (blau, s. Abb. 2) setzt sich aus zwei Teilen zusammen: einer Dreiecksfläche (hellblau) und einem Ellipsenabschnitt (dunkelblau). Der Ellipsenabschnitt geht durch Stauchung aus dem entsprechenden Kreisabschnitt (violett) hervor. Der Kreisabschnitt wiederum berechnet sich als Differenz eines Kreisabschnitts und eines Dreiecks (gelb):

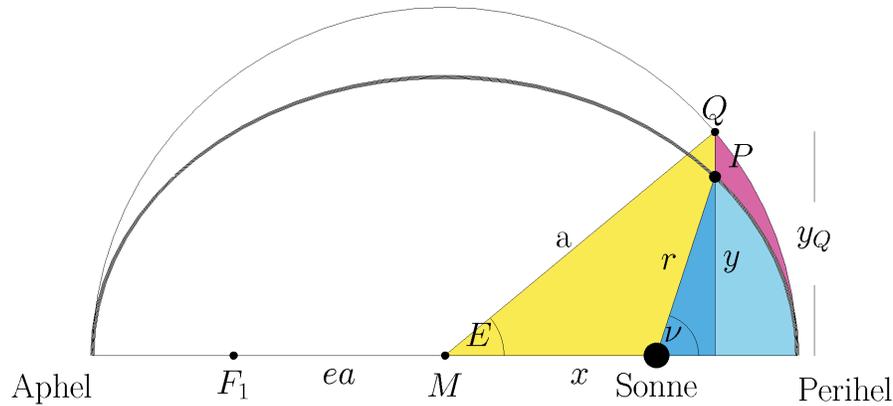


Abbildung 2: Zur Berechnung der seit dem Periheldurchgang überstrichenen Fläche (blau)

$$\begin{aligned}
 A &= A(\text{Dreieck}) + A(\text{Ellipsenabschnitt}) \\
 &= A(\text{Dreieck}) + \frac{b}{a} A(\text{Kugelabschnitt}) \\
 &= A(\text{Dreieck}) + \frac{b}{a} (A(\text{Kugelausschnitt}) - A(\text{Dreieck}_2)) \\
 &= \frac{1}{2} r \cos \nu - \frac{b}{a} a \sin E + \frac{b}{a} \left( \frac{\pi a^2}{2\pi} E - \frac{1}{2} a \cos E a \sin E \right) \\
 &\stackrel{(22)}{=} \frac{1}{2} ab [(\cos E - e) \sin E + E - \cos E \sin E] \\
 &= \frac{1}{2} ab (E - e \sin E)
 \end{aligned}$$

3. Zusammen mit (26) ergibt sich daraus:

$$M = E - e \sin E \quad (\text{Kepler-Gleichung}) \quad (27)$$

Die Kepler-Gleichung ist eine transzendente Gleichung zur Bestimmung von  $E$ ; sie ist nicht analytisch zu lösen. Allerdings ist sie in der Regel einfach – beginnend mit  $E = M$  – iterativ zu lösen. Dadurch kann man zu jedem beliebigen Zeitpunkt die exzentrische Anomalie  $E$  berechnen.

Zur Berechnung des Planetenortes bei bekannten Werten der großen Halbachse  $a$ , der numerischen Exzentrizität  $e$  und der Umlaufzeit  $T$  für eine beliebige Zeit  $t$  nach Periheldurchgang sind folgende Schritte erforderlich:

1. Berechne die mittlere Anomalie  $M$  gemäß (26).
2. Numerische Lösung der Kepler-Gleichung (27) ergibt die zugehörige exzentrische Anomalie  $E$ .
3. Die wahre Anomalie  $\nu$  lässt sich dann aus (25) berechnen.
4. Der Abstand  $r$  des Planeten von der Sonne ergibt sich dann aus (24).

### 5.3 Lösung der Kepler-Gleichung

Schreibt man die Kepler-Gleichung in der Form

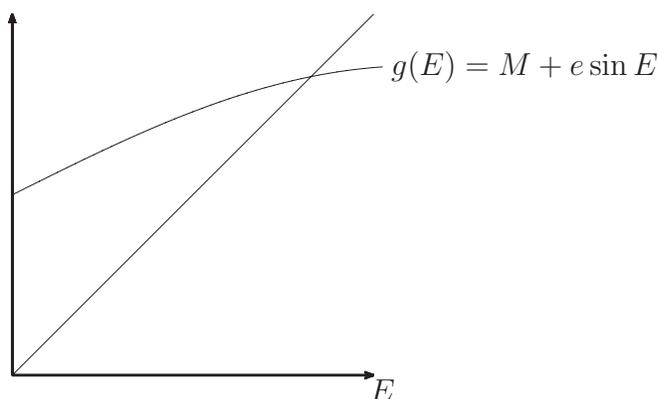
$$E = M + e \sin E = g(E),$$

dann bedeutet die Lösung der Gleichung das *Auffinden des Fixpunktes* der Funktion  $g(E)$ .

Am anschaulichsten lässt sich dieser Fixpunkt graphisch bestimmen.

#### 5.3.1 Graphisches Verfahren

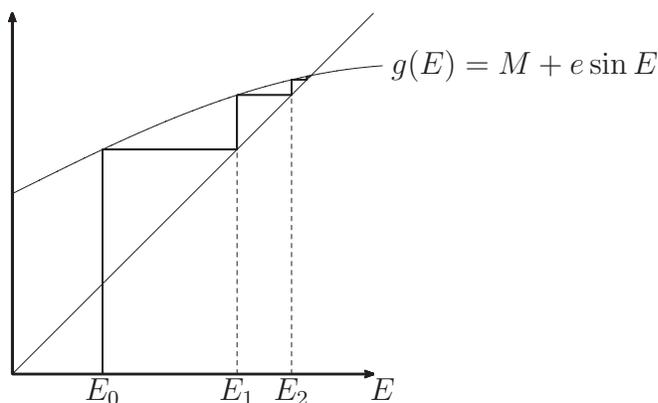
Der Fixpunkt ergibt sich als Schnittpunkt des Graphen von  $g$  mit der Winkelhalbierenden:



#### 5.3.2 Iteratives Verfahren

Durch numerische Iteration ergibt sich die Lösung folgendermaßen: Man startet mit einem (weitgehend beliebigen) Wert  $E_0$ . Für diesen berechnet man den Funktionswert  $E_1 = g(E_0)$ . Diesen benutzt man als zweiten Iterationswert:  $E_2 = g(E_1)$ ,  $\dots$ . Da in der Regel  $e \ll 1$  gilt, konvergiert dieser Algorithmus so meist schnell, dass man ihn auch mit „von Hand“ (d.h. mit einem Taschenrechner) durchführen kann.

Grafisch stellt sich dieser Algorithmus folgendermaßen dar:



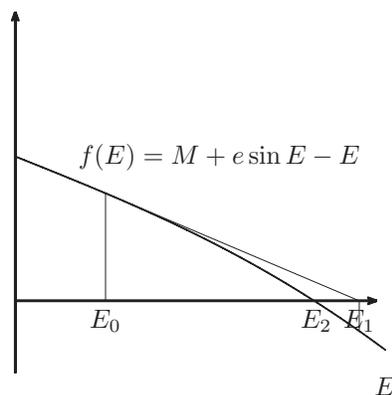
#### 5.3.3 Newton-Verfahren

Schreibt man die Kepler-Gleichung folgendermaßen um

$$f(E) = M + e \sin E - E = 0,$$

dann ist von der Funktion  $f(E)$  die Nullstelle zu finden. Dazu kennt man in der numerischen Mathematik das Newton-Verfahren, für das man zusätzlich die Ableitung  $f'(E)$  benötigt, die hier einfach zu berechnen ist:

$$f'(E) = e \cos E - 1$$



## 5.4 Hausaufgabe

Berechnen Sie die heutige (3.2.2003) Position von Mars auf seiner Bahnellipse, d.h. seine wahre Anomalie  $\nu$  und seinen Abstand  $r$  von der Sonne!

Gegeben sind dazu die folgenden Daten:

1. Periheldurchgang war am 7.1.1998.
2. Zu dem Zeitpunkt hatte Mars den Abstand  $r = 1.381AE$  von der Sonne.
3. Die Exzentrizität der Marsbahn beträgt  $e = 0.0934$ .
4. Die Umlaufzeit von Mars beträgt  $T_{sid} = 687d$ .

In der Literatur findet man folgendes Ergebnis:  $r = 1.582AE$ .

**Lösung:**

1. Berechnung der mittleren Anomalie  $M$ :
  - Julianisches Datum vom 7.1.1998: 2450821
  - Julianisches Datum vom 3.2.2003: 2452674
  - Seit dem 7.1.1998 sind also 1853 Tage vergangen.
  - Die mittlere Anomalie beträgt also

$$M = \frac{2\pi}{T} \Delta d = 16.939 \xrightarrow{-4\pi} 4.3808 = 251^\circ$$

2. Numerische Lösung der Kepler-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 E_{i+1} &= M + e \sin E_i \\
 E_0 &= M \\
 E_1 &= 4.2924 \\
 E_2 &= 4.2955 \\
 E_3 &= 4.2954 \\
 E_4 &= 4.2954 = 246.11^\circ = E
 \end{aligned}$$

3. Berechnung der wahren Anomalie  $\nu$ :

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (28)$$

$$\implies \nu = -118.70^\circ = 241.30^\circ \quad (29)$$

4. Berechnung des heliozentrischen Abstandes  $r$ :

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e \cos \nu} \\
 &= \frac{r_P(1+e)}{1+e \cos \nu} \\
 &= 1.5809AE
 \end{aligned}$$

## 6 Zwei- und Mehrkörperproblem

### 6.1 Das Kepler-Problem als Einkörper-Problem

- Bei den bisherigen Überlegungen wurde die Sonne als unendlich schwer und deshalb im Raum ruhend angenommen. Nur in diesem vereinfachten Fall wirkt auf den Planeten eine Zentralkraft. Die Bewegungsgleichung des Planeten sieht dann aufgrund des Newton'schen Gravitationsgesetzes folgendermaßen aus:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{mM_S}{r^3} \vec{r} \quad (30)$$

Dabei sind  $\gamma$  die Gravitationskonstante,  $M_S$  die Masse der Sonne und  $\vec{r}$  der Vektor Sonne→Erde.

Da dabei nur die Bewegung des Planeten berücksichtigt werden muss, spricht man auch von einem *Einkörper-Problem*.

- Neben der bisher behandelten *analytischen* Berechnungsmethode gibt es auch die Möglichkeit, diese Bewegungsgleichung(en) *numerisch* zu integrieren, wenn man Anfangsort und -geschwindigkeit (das sind i.a. 6 Größen!) kennt.
- Die 3 Bewegungsgleichungen 2. Ordnung können umgeschrieben werden in 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= -\gamma \frac{M_S}{r^3} x \\ \dot{v}_y &= -\gamma \frac{M_S}{r^3} y \\ \dot{v}_z &= -\gamma \frac{M_S}{r^3} z \end{aligned}$$

### 6.2 Verallgemeinerung auf das Zwei-Körper-Problem

- Berücksichtigt man die endliche Masse des Zentralkörpers, dann ist die Annahme der Bewegungslosigkeit nicht mehr gerechtfertigt, da nach dem 3. Newton'schen Gesetz auch auf den Zentralkörper (vom Planeten) eine Kraft ausgeübt wird. Das bisher behandelte Ein-Körper-Problem wird dadurch zum Zwei-Körper-Problem.
- Beschreibt man den Ort beider Körper in einem beliebigen (Inertial-) System, dann lauten die beiden Bewegungsgleichungen (genauer: die 6 Bewegungsgleichungen!):

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (31)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (32)$$

- Führt man statt der Koordinaten  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  die neuen Koordinaten  $\vec{R}, \vec{r}$  durch

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ und } \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (33)$$

ein, dann sieht man für die sogenannte Schwerpunktskoordinate  $\vec{R}$  sofort:

$$\ddot{\vec{R}} \sim m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0. \quad (34)$$

Der Schwerpunkt hat also eine konstante Geschwindigkeit und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den Ursprung eines neuen (Inertial-) Systemes gesetzt werden.

- Für die Relativkoordinate  $\vec{r}$  gilt:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \gamma \frac{m_2}{r^3} (-\vec{r}) - \gamma \frac{m_1}{r^3} \vec{r} = -\gamma(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (35)$$

$$\implies \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = -\gamma(m_1 + m_2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (36)$$

- Führt man nun durch

$$M := m_1 + m_2 \text{ und } \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (37)$$

die Gesamtmasse  $M$  und die sogenannte reduzierte Masse  $\mu$  ein, dann folgt schließlich:

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{\mu M}{r^3} \vec{r}} \quad (38)$$

- Das ist aber die Ein-Körper-Bewegungsgleichung (30) eines Teilchens der Masse  $\mu$  im Feld eines festen Zentralkörpers der Masse  $M$ . **Der Relativvektor  $\vec{r}$  beschreibt also eine Keplerbahn!**
- Kennt man aber  $\vec{r}(t)$ , dann lassen sich die Einzelvektoren  $\vec{r}_i$  leicht berechnen: Mit

$$\vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

folgt nämlich:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \text{ und } \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (39)$$

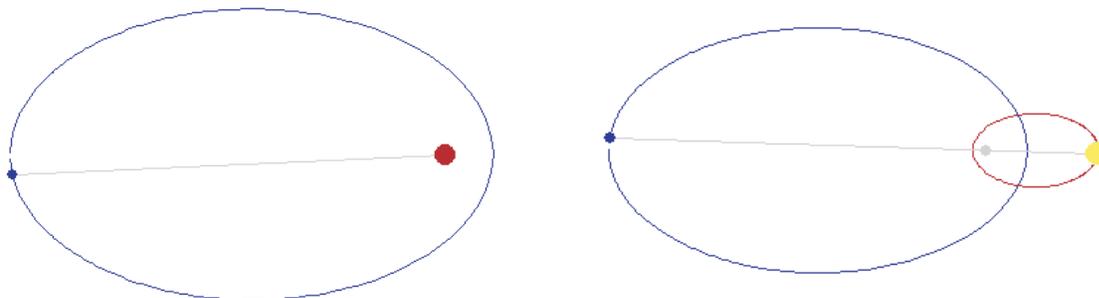


Abbildung 3: Zwei-Körper-Bewegung ( $m_1 : m_2 = 3$ ,  $\epsilon = 0.8$ ). links: Bewegung der reduzierten Masse im Feld der Gesamtmasse, rechts: Bewegung der Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt (erzeugt mit `Zweikoerper.exe`)

- Mit  $\vec{R} \equiv 0$  wird daraus:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \text{ und } \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (40)$$

Beide Körper beschreiben also „gegenüberliegende“ Keplerbahnen, deren Radien sich umgekehrt wie die Massen verhalten:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (41)$$

Auch das Zwei-Körper-Problem ist also noch analytisch zu behandeln!

- Demonstration der Bewegungen mit `zweikoer`:
  - Ein-Körper und Zwei-Körper-Bewegung mit  $\frac{m}{M} = 0$ ,
  - Zwei-Körper-Bewegungen mit  $\frac{m}{M} =$ 
    - \* 1:300000 (Erde/Sonne),
    - \* 1:1000 (Jupiter/Sonne)
    - \* 1:10
    - \* 1:2
    - \* 1:1

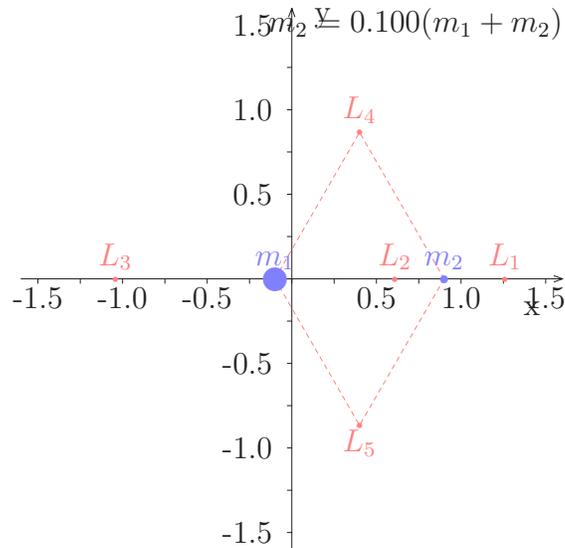


Abbildung 4: Lage der fünf Lagrange-Punkte  $L_1$ - $L_5$  für  $m_2 = 0.1(m_1 + m_2)$

### 6.3 Ausblick auf das Mehr-Körper-Problem: Das eingeschränkte Drei-Körper-Problem

- Das Drei-Körper-Problem ist, im Gegensatz zum Zwei-Körper-Problem, nicht mehr analytisch lösbar. Es hat lange Zeit die größten Köpfe aus Mathematik und Physik (insbesondere Poincaré) beschäftigt.
- Es wurden viele Spezialfälle untersucht, um wenigstens Teilaspekte analytisch behandeln zu können.
- Der wichtigste Spezialfall ist das so genannte **reduzierte Drei-Körper-Problem**: Zwei schwere Körper (z.B. **Stern** und **Planet**) umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf Kreisbahnen. Ein **Mond**, der so leicht ist, dass er die Bewegungen der beiden Sterne nicht beeinflusst, bewegt sich im Feld dieser Himmelskörper. Beschrieben wird die Bewegung im *mitrotierenden Bezugssystem*, in dem Stern und Planet ruhen.

#### 6.3.1 Die Lagrange-Punkte des eingeschränkten Drei-Körper-Problems

Überraschenderweise gibt es in dem rotierenden Koordinatensystem des reduzierten Drei-Körper-Problems fünf Gleichgewichtspunkte (<http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkt>, <http://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf>), die mit  $L_1$  bis  $L_5$  bezeichnet werden (s. Abb. ??):

1. Der „innere“ Lagrange-Punkt liegt zwischen den beiden großen Körpern, nahe am Planeten, auf der Verbindungslinie. Seine Existenz kann man sich folgendermaßen veranschaulichen: Ein Planet mit einem kleineren Abstand zum Zentralgestirn hat im Zwei-Körper-Problem aufgrund der Kepler'schen Gesetze eine kleinere Umlaufzeit. Der nahe äußere Planet aber „hält“ ihn zurück: Im geeigneten Abstand ist seine Gravitationskraft gerade so groß, dass die Gravitations des Zentralgestirns geeignet

verringert wird. Im rotierenden Bezugssystem halten die Gravitationskraft des Planeten und die Zentrifugalkraft gerade der Gravitationsanziehung durch den Stern das Gleichgewicht.

Der Lagrange-Punkt  $L_1$  zwischen Sonne und Erde wird für Sonnenbeobachtungssatelliten benutzt: Seit 1995 „umkreist“ ihn SOHO langsam in etwa 600.00 km Entfernung.

2.  $L_2$  befindet sich hinter dem Planeten, in etwa gleicher Entfernung von ihm wie  $L_1$ . Sein Zustandekommen kann man sich ähnlich veranschaulichen. Der  $L_2$ -Punkt des Erde-Sonne-Systems wird gern für Weltraumteleskope verwendet. Z.B. untersucht der Satellit WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) von dort die Anisotropie des Mikrowellenhintergrundes.
3.  $L_3$  befindet sich, vom Planeten aus gesehen, in etwa gleicher, aber etwa geringerer Entfernung, hinter dem Stern. Auch sein Zustandekommen lässt sich ähnlich wie bei  $L_1$  und  $L_2$  erklären. Der  $L_3$ -Punkt war in Science-Fiction-Romanen und -Comics ein beliebter Platz für eine hypothetische „Gegenerde“, weil dieser Ort von der Erde aus niemals beobachtbar ist.
4.  $L_4$  und  $L_5$  bilden mit Stern und Planet gleichseitige Dreiecke. Ihre Lage ist, anders als die der anderen Gleichgewichtspunkte, *unabhängig vom Massenverhältnis* der beiden schweren Körper! Das Zustandekommen dieser beiden Gleichgewichtspunkte ist qualitativ schwieriger zu veranschaulichen als das der anderen: Der Mond unterliegt, bei deutlich kleinerer Masse des Planeten, im Wesentlichen denselben Bedingungen wie der Planet, kann also den Zentralstern in derselben Zeit umkreisen, im Inertialsystem um  $60^\circ$  vor- oder hinterherlaufend. Die zusätzliche Gravitationsanziehung des Planeten ist gerade so groß, dass die auf den Mond wirkende Gesamtkraft ihn nicht zum Stern, sondern zum Schwerpunkt der beiden schweren Körper zieht. Dass dies für jedes Massenverhältnis an derselben Stelle „gelingt“, ist ein „Wunder“! Im Sonnensystem sind die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  tatsächlich besetzt:

- (a) Die Asteroiden, die  $60^\circ$  vor oder hinter Jupiter die Sonne umkreisen, heißen *Trojaner*.
- (b) 1990 wurde Eureka entdeckt: ein Mars-Trojaner.
- (c) 2001 wurde ein Neptun-Trojaner entdeckt: der Asteroid QR322.
- (d) Weitere Trojaner gibt es im Saturn-Sonne-System und in den Mondsystemen von Jupiter und Saturn. So hat der Saturnmond Tethys die kleinen Monde Telesto in seinem  $L_4$ - und Calypso in seinem  $L_5$ -Punkt.

### 6.3.2 Die Berechnung der Lagrange-Punkte

Im rotierenden Koordinatensystem wirken auf einen Mond am Ort  $\vec{r}$  vier Kräfte, die Gravitationskraft des Sterns am Ort  $\vec{r}_S$ , die Gravitationskraft des Planeten am Ort  $\vec{r}_P$ , die Zentrifugalkraft und die Coriolis-Kraft:

$$\vec{F} = \gamma \frac{mM_S}{|\vec{r}_S - \vec{r}|^3} (\vec{r}_S - \vec{r}) + \gamma \frac{mM_P}{|\vec{r}_P - \vec{r}|^3} (\vec{r}_P - \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{r} \quad (42)$$

Wenn der Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt gelegt wird und die  $x$ -Achse zum Planeten zeigt haben Stern und Planet die Örter  $\vec{r}_S = -\frac{m_P}{m_S+m_P}$  und  $\vec{r}_P = \frac{m_S}{m_S+m_P}$ . Die Winkelgeschwindigkeit am Ort  $\vec{r}$  beträgt  $\omega^2 = \gamma \frac{m_S+m_P}{d^3}$ . Dabei ist  $d$  der feste Abstand zwischen Stern und Planet.

Überraschenderweise lässt sich mit diesen Beziehungen durch Einsetzen leicht bestätigen, dass an den Punkten  $L_4$  und  $L_5$  die Gesamtkraft null ist.

Eigentlich sollte man erwarten, dass die Berechnung der ersten drei Lagrange-Punkte noch einfacher ist, weil hier nur die  $x$ -Komponenten zu berücksichtigen sind. Leider ist das Gegenteil der Fall: Die Gleichgewichtsbedingung führt auf eine analytisch nicht lösbare Gleichung für  $r_0$ .

### 6.3.3 Das effektive Potential im reduzierten Drei-Körper-Problem

Bei der numerischen Behandlung des reduzierten Drei-Körper-Problems ist es üblich, die Koordinaten so zu transformieren, dass die Bewegungsgleichungen möglichst einfach werden:

1.  $\vec{r} \rightarrow \frac{1}{d}\vec{r}$  (Dadurch wird der Abstand zwischen Stern und Planet 1.)
2.  $t \rightarrow \omega t$  (Dadurch wird die feste Umlaufzeit im Inertialsystem zu  $2\pi$ .)
3.  $m = \frac{m_P}{m_S+m_P}$
4.  $b_1 = 1 - m = x_P$ ,  $b_2 = -m = x_S$
5.  $\vec{r}_{MS} = \vec{r}_S - \vec{r}_M$ ,  $\vec{r}_{MP} = \vec{r}_P - \vec{r}_M$

Mit diesen Vereinbarungen vereinfacht sich die Bewegungsgleichung des Mondes zu

$$\ddot{\vec{r}}_M = \frac{b_1}{|\vec{r}_{SM}|^3}\vec{r}_{SM} - \frac{b_2}{|\vec{r}_{PM}|^3}\vec{r}_{PM} + \vec{r}_M - 2\vec{e}_z \times \dot{\vec{r}}_M \quad (43)$$

Schließlich wird noch durch

$$U_{eff} = - \int_{\infty}^{\vec{r}_M} \frac{\vec{F}}{m} \cdot d\vec{r} = -\frac{b_1}{|\vec{r}_{SM}|} + \frac{b_2}{|\vec{r}_{PM}|} - \frac{1}{2}\vec{r}_M \cdot \dot{\vec{r}}_M$$

ein effektives Potential eingeführt. Es ist in Abbildung 5 dargestellt. Man kann es sich entstanden denken durch die Überlagerung dreier Potentiale,

1. des  $\frac{1}{r}$ -Potentials des Sterns,
2. des  $\frac{1}{r}$ -Potentials des Planeten und
3. des  $-r^2$ -Potentials der Zentrifugalkraft.

Abbildung 7 veranschaulicht diese Überlagerung auf der  $x$ -Achse, also für  $y = 0$ .

Die Gleichgewichtspunkte sind die Orte, an denen das effektive Potential Extremwerte annimmt. Abbildung 7 zeigt, dass es sich auf der  $x$ -Achse um *Maximalwerte handelt*, die Gleichgewichtspunkte also nicht stabil sind! Abbildung 5 macht diesen Umstand noch

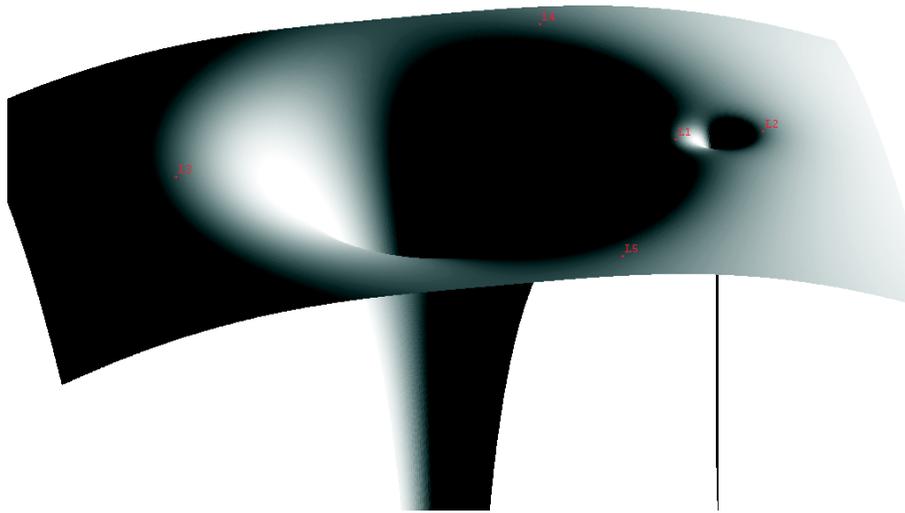


Abbildung 5: Dreidimensionale Darstellung des effektiven Potentials. Die fünf Lagrange-Punkte sind rot markiert.

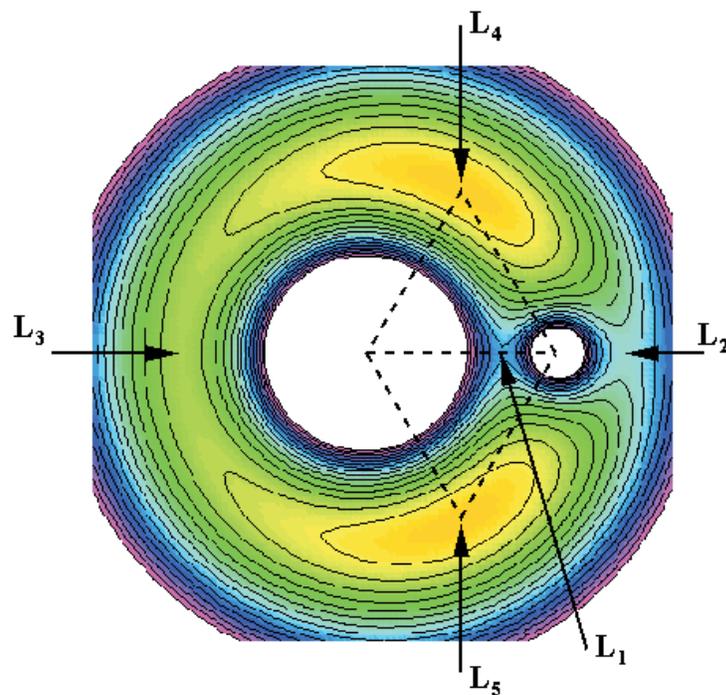


Abbildung 6: Höhenlinienprofil des effektiven Potentials (aus [8])

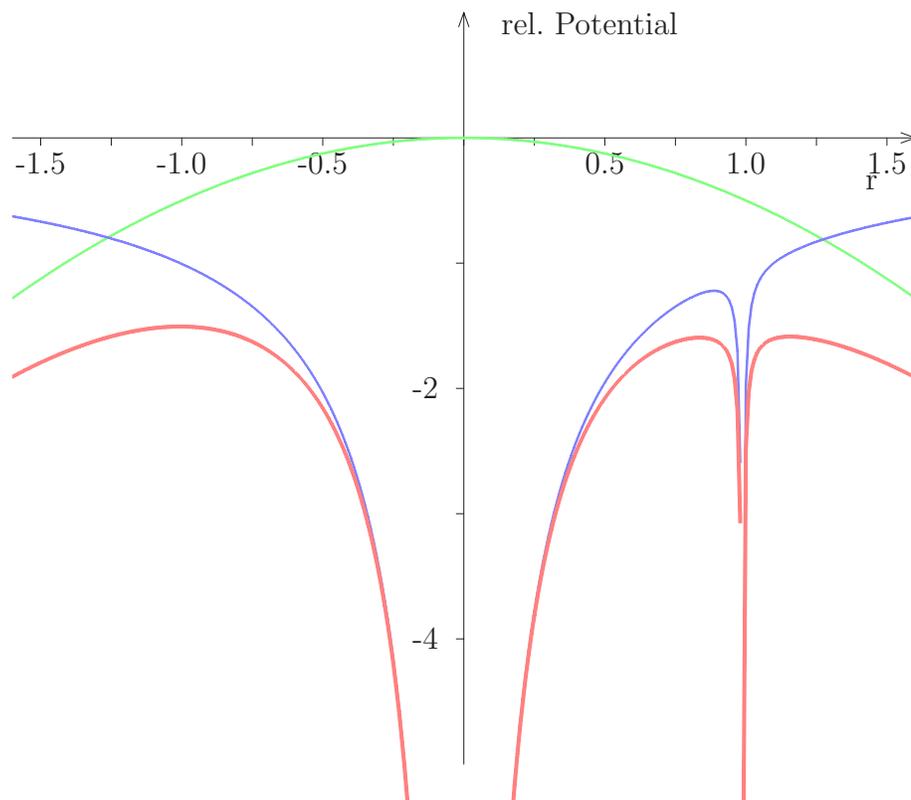


Abbildung 7: Effektives Potential im rotierenden Bezugssystem: Das Gesamtpotential (rot) ist die Summe aus dem Gravitationspotential der beiden Himmelskörper (blau) und dem Potential der Zentrifugalkraft (grün).

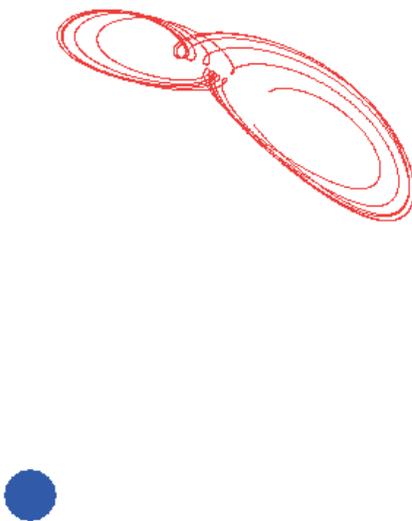


Abbildung 8: Der Lagrange-Punkt  $L_4$  erweist sich in der Simulation als dynamisch stabil.

deutlicher: Bei den Lagrange-Punkte  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  handelt es sich um „Eindellungen im Kraterrand“ – also um Sattelpunkte. Die Lagrange-Punkte  $L_4$  und  $L_5$  dagegen um lokale Maxima auf dem Kraterrand (der ja bei  $L_3$  und  $L_{1,2}$  etwas „eingedellt“ wird.), und damit um echte Maxima.

Tatsächlich erweisen sich die Verhältnisse noch komplizierter:

1. In der Simulation zeigt sich, dass ein Mond, der in der Nähe von  $L_4$  oder  $L_5$  „ausgesetzt“ wird, diesen umläuft, also immer in seiner Nähe bleibt<sup>4</sup> (s. Abb. 8). Die Ursache dafür ist die Coriolis-Kraft: Wenn sich der Mond beginnt von dem instabilen Gleichgewichtspunkt zu entfernen, tritt durch seine Bewegung zusätzlich die Coriolis-Kraft auf.
2. Die Lagrange-Punkte auf der Verbindungslinie erweisen sich allerdings als auch dynamisch instabil. Allerdings gibt es in ihrer Nähe instabile (hyperbolische) Orbits (s. SOHO-Orbit (s.49))!

#### 6.3.4 Periodische Orbits im reduzierten Drei-Körper-Problem

Es sind, vermutlich durch Ausprobieren, einige periodische Orbits des Mondes im reduzierten Drei-Körper-Problem gefunden worden. Sie werden nach den Namen ihrer Entdecker benannt. Im Programm `DreiKoerper.exe` sind drei davon voreingestellt. Sie alle treten auf unter Bedingungen, die ganz ähnlich dem Erde (als Stern)- Mond (als Planet)-System sind.

**Davidson-Orbit** Es handelt sich um die Bahn einer Raumsonde abwechselnd die Erde und den Mond umläuft: Solange sie die Erde umrundet, ist ihre Bahn eine nur leicht gestörte Kepler-Ellipse. Wenn sie aber dem Mond nach einigen Bewegungen

<sup>4</sup>Die reale Existenz der Trojaner ist ein Hinweis auf diese *dynamische Stabilität*.

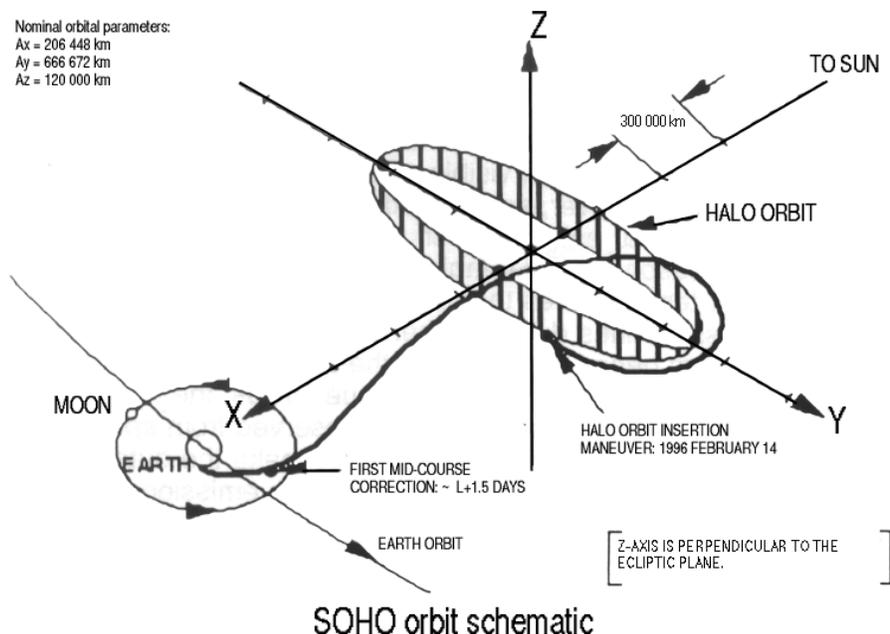


Abbildung 9: SOHOs Halo-Orbit, schematisch)

zu nahe kommt, wird sie von diesem eingefangen und muss diesen umrunden, bis sie umgekehrt der Erde zu nahe kommt und von ihr wieder eingefangen wird. Dann durchläuft sie wieder näherungsweise eine Kepler-Ellipse, deren Apsidenlinie allerdings gegenüber der vorhergegangenen deutlich verdreht ist. Der Bewegung im Inertialsystem sieht man zwar eine gewisse Regelmäßigkeit an, würde aber kaum eine strenge Periodizität vermuten. Diese tritt jedoch im mitrotierenden Koordinatensystem eindrucksvoll zu Tage. Dort erkennt man, dass die Bewegung in unmittelbarer Nähe von Lagrange-Punkt  $L_2$  startet. (Abbildung12

**Francis-Orbit** Wieder ist die Kepler-Bewegung um die Erde zunächst nur wenig gestört (Abb. 13). Allerdings ist die Ellipse so groß, dass sie die Mondbahn schneidet. Dadurch kommt es in regelmäßigen Zeitabständen zu sehr nahen Begegnungen zwischen Mond und Raumsonde. Dem Mond gelingt es zwar nicht, die Sonde einzufangen, aber er kann ihre Bahn nachhaltig ändern<sup>5</sup>.

**SOHO-Orbit** SOHO umrundet den Lagrange-Punkt  $L_1$  auf einem instabilen, hyperbolischen Orbit, in den er innerhalb seiner stabilen Mannigfaltigkeit injiziert wurde ([3]).

Alle diese Orbits sind instabil: Bei geringster Abweichung von den geeigneten Startbedingungen verlässt die Sonde den Orbit – und dann meist das ganze System (s. Abb. 14).

<sup>5</sup>Die Begegnung zwischen Mond und Raumsonde ist so nahe, dass dort mit sehr kleiner Schrittweite integriert werden muss, damit die Sonde nicht scheinbar aus dem Erde-Mond-System hinauskatapultiert wird.

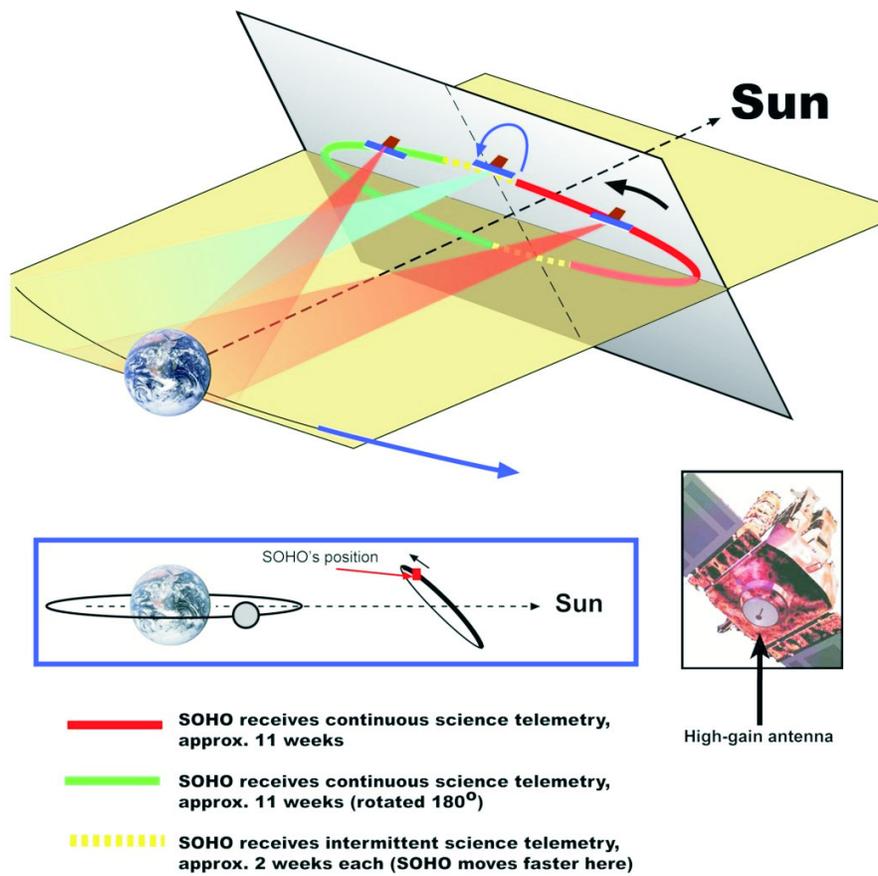


Abbildung 10: SOHOs Orbit

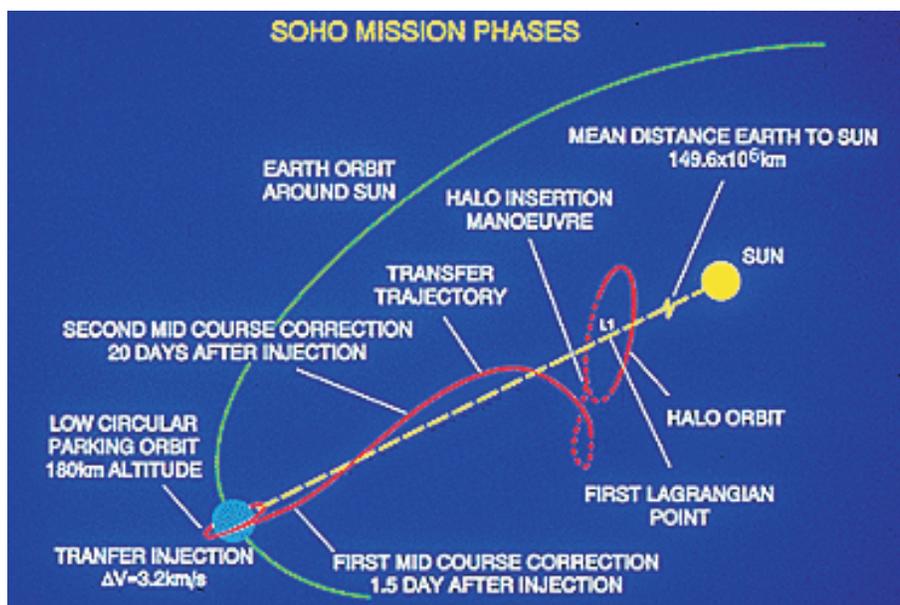


Abbildung 11: SOHOs „Injection Procedure“

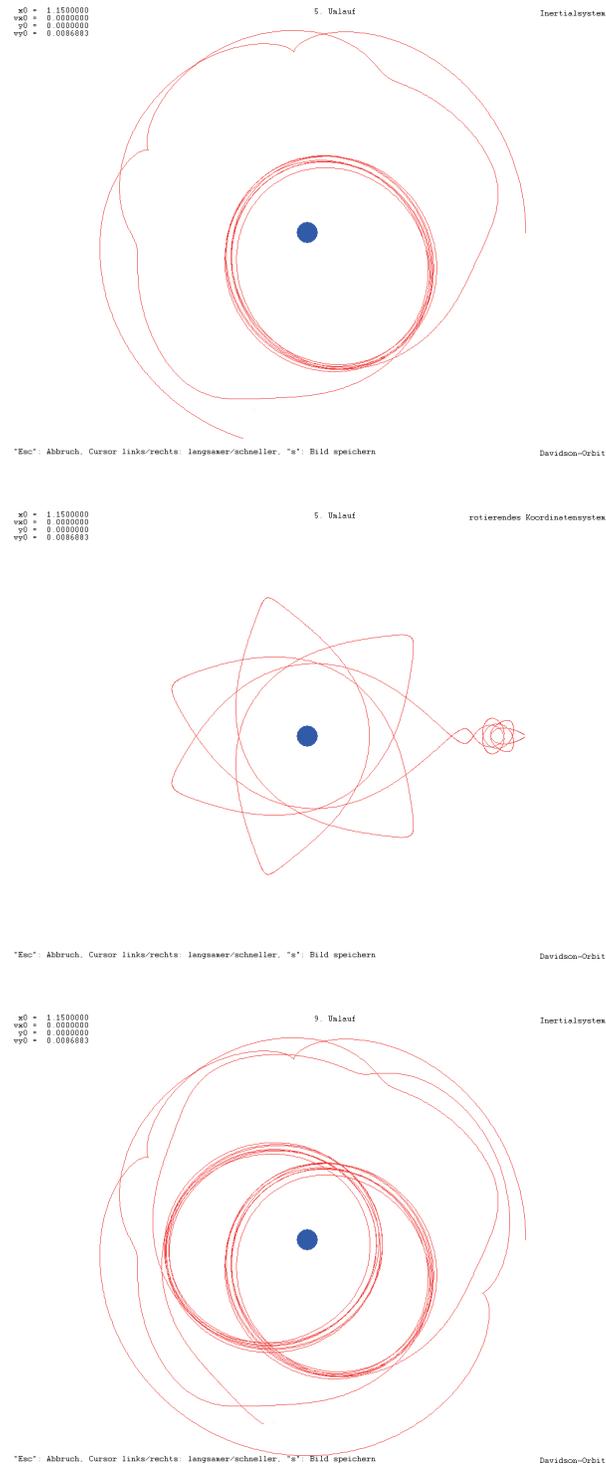


Abbildung 12: Der Davidson-Orbit. oben: eine Periode im Inertialsystem, Mitte: eine Periode im rotierenden Bezugssystem, unten: zwei Perioden im Inertialsystem (erzeugt mit Dreikoerper.exe)

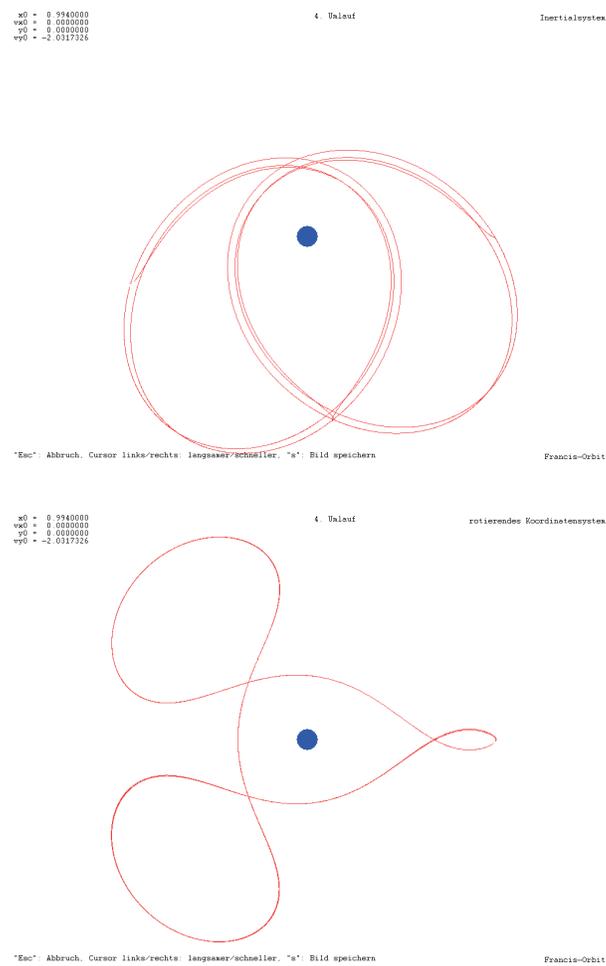


Abbildung 13: Der Francis-Orbit. oben: zwei Perioden im Inertialsystem, unten: zwei Perioden im rotierenden Bezugssystem (erzeugt mit `Dreikoerper.exe`)

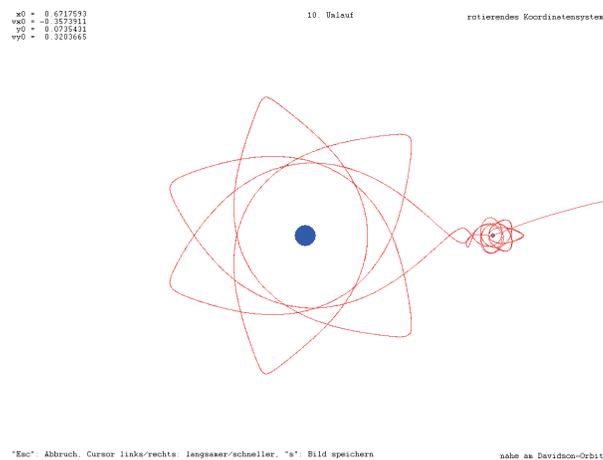
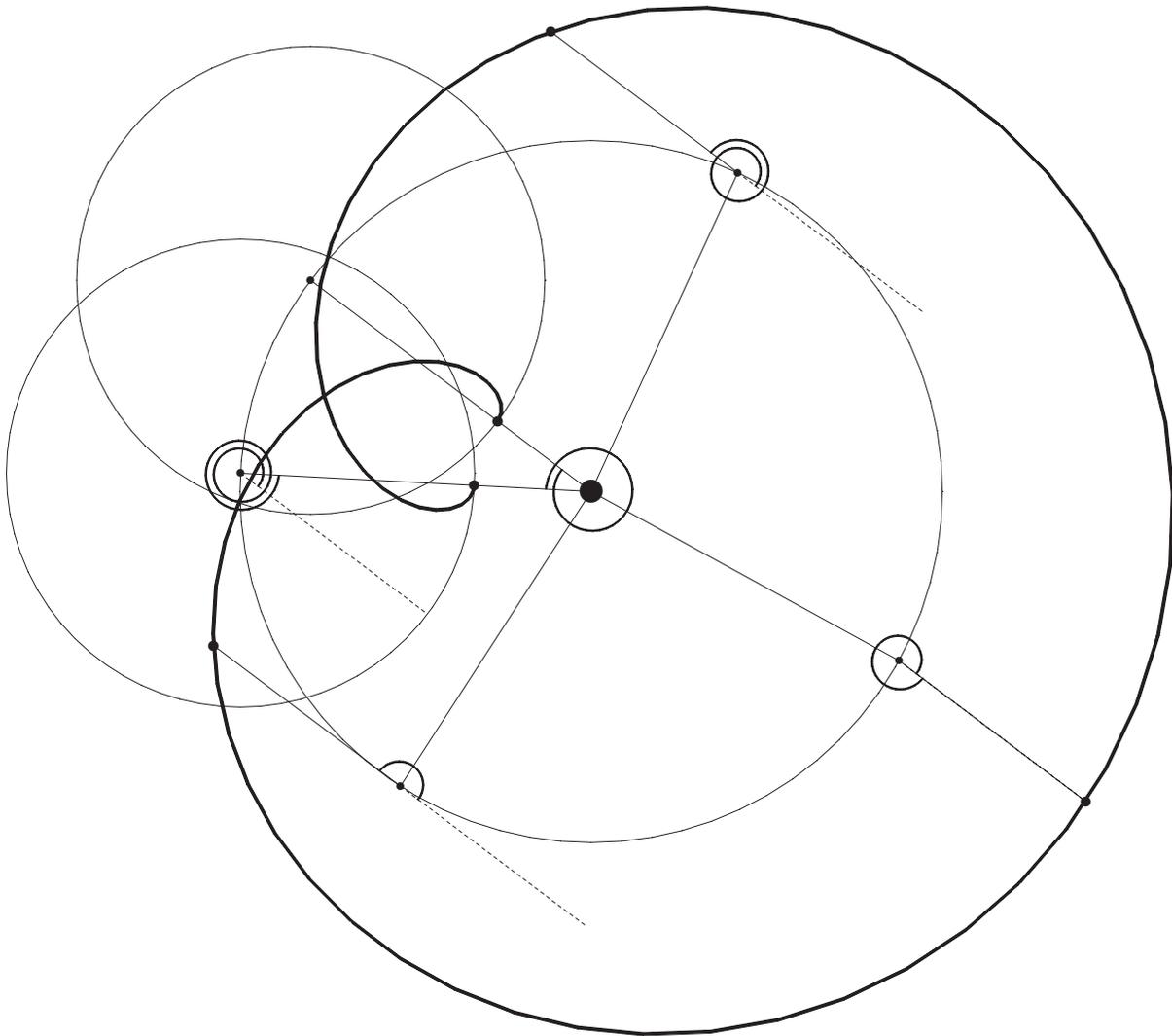


Abbildung 14: Bei etwas falschen Anfangsbedingungen folgt die Sonde lange Zeit scheinbar dem periodischen Orbit, um dann an einem der sensiblen Punkte (hier  $L_1$ ) aus der Bahn geworfen zu werden.

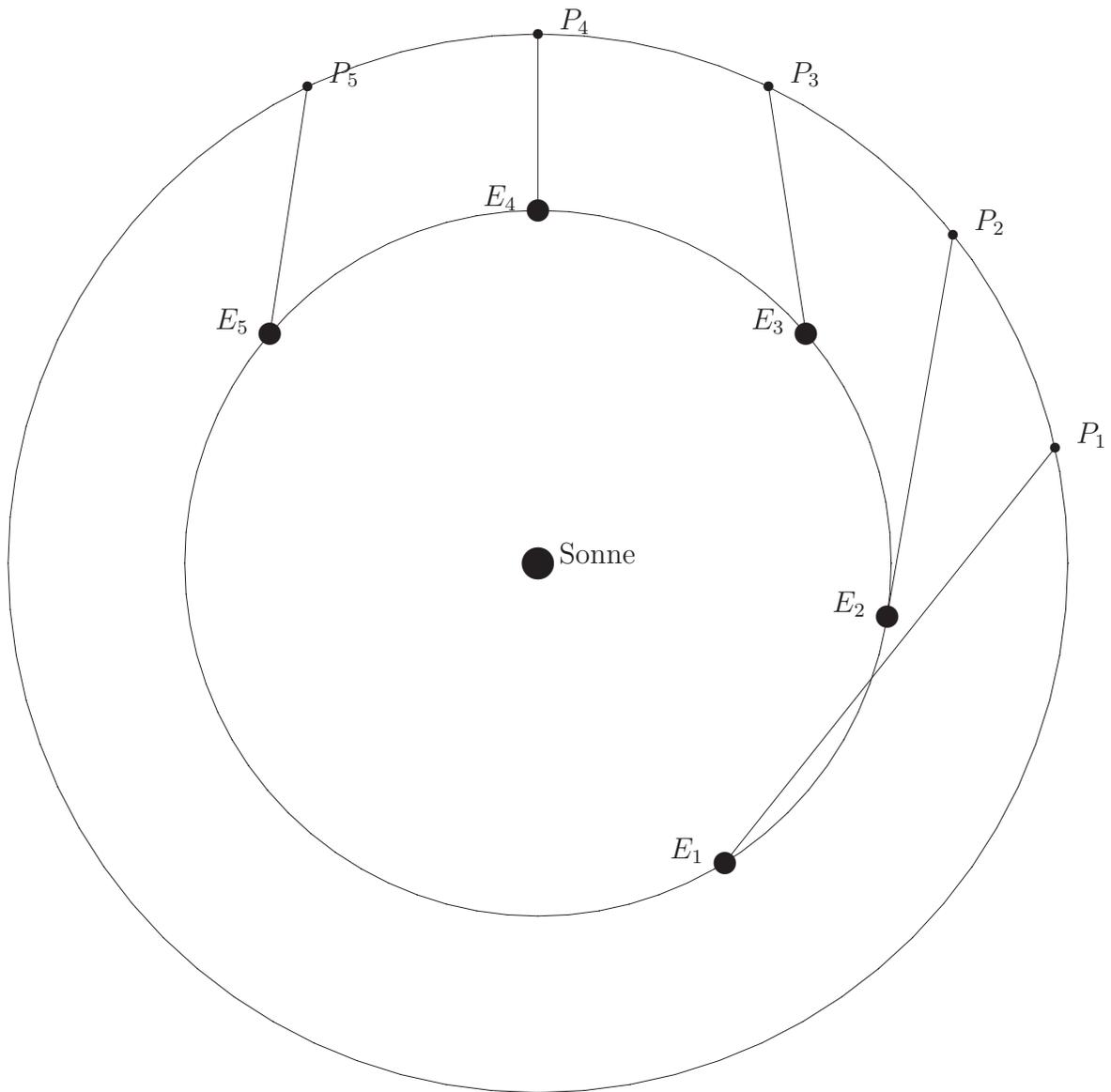
## 7 Folien

## geozentrische Marsbewegung zwischen zwei Erdnähen



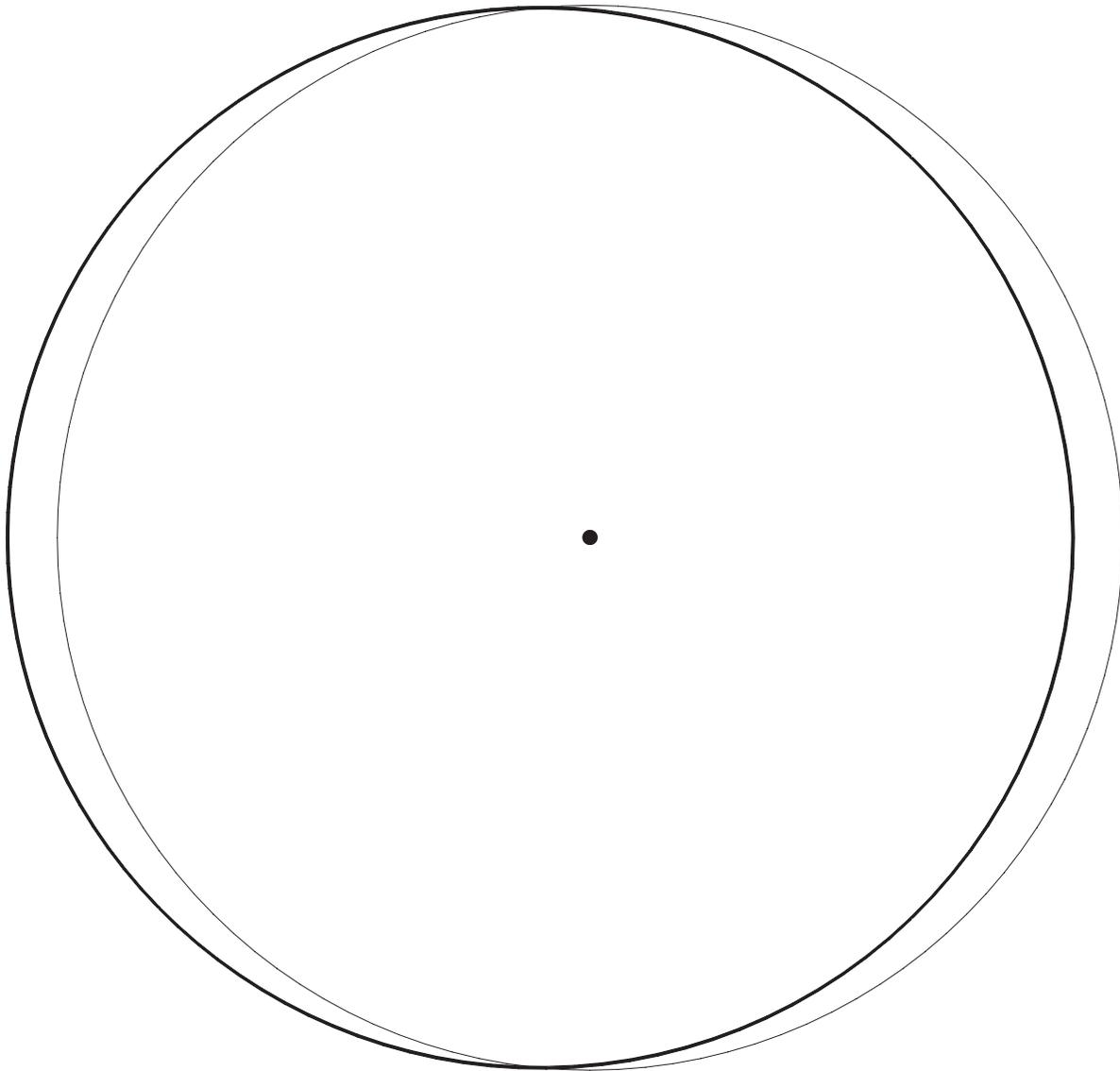
# Planetenbewegung

(heliozentrisch betrachtet)



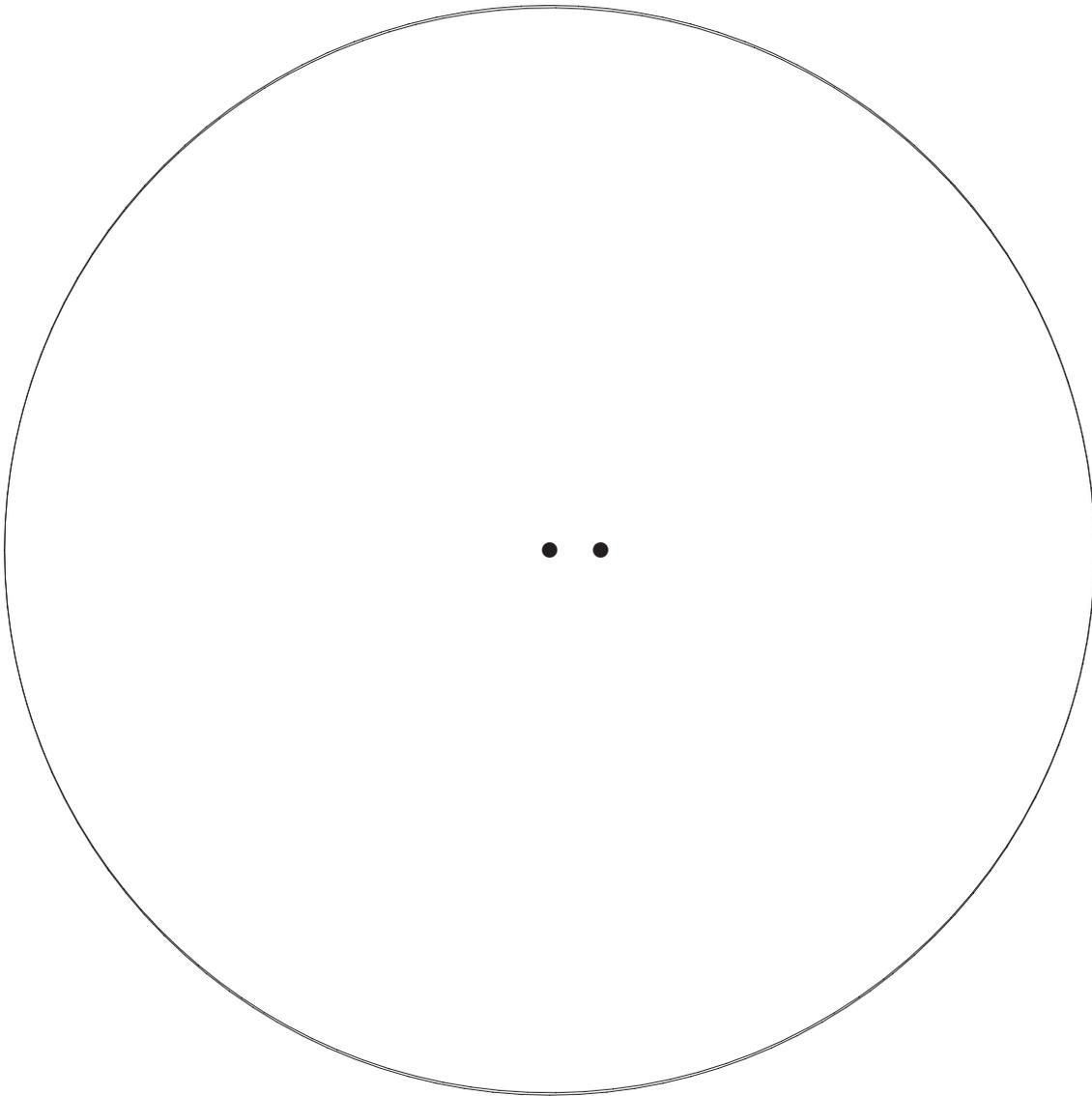
# Marsbahn und Kreisbahn

(bezüglich ihres Brennpunktes)



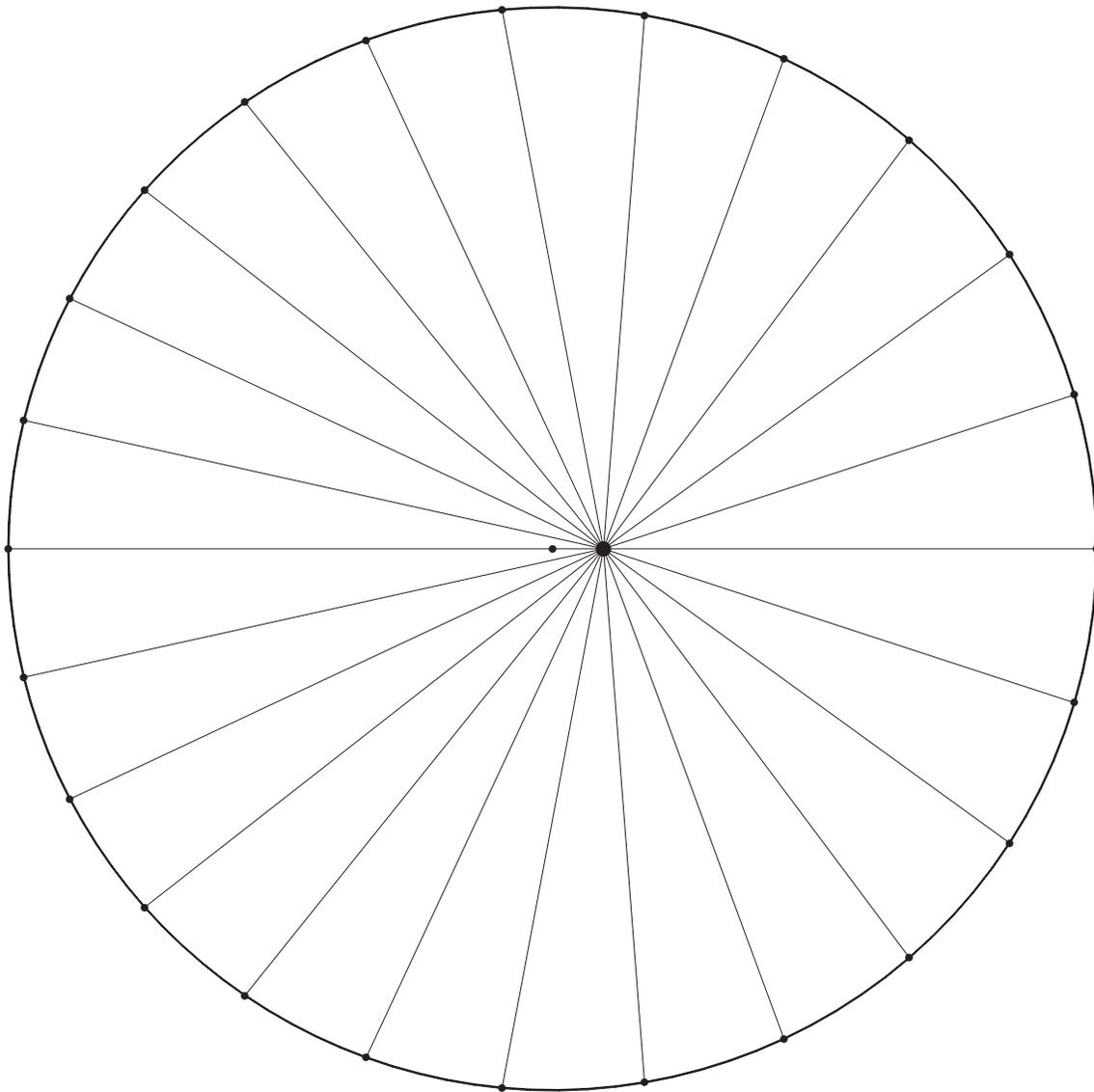
# Marsbahn und Kreisbahn

(bezüglich ihres Mittelpunktes)



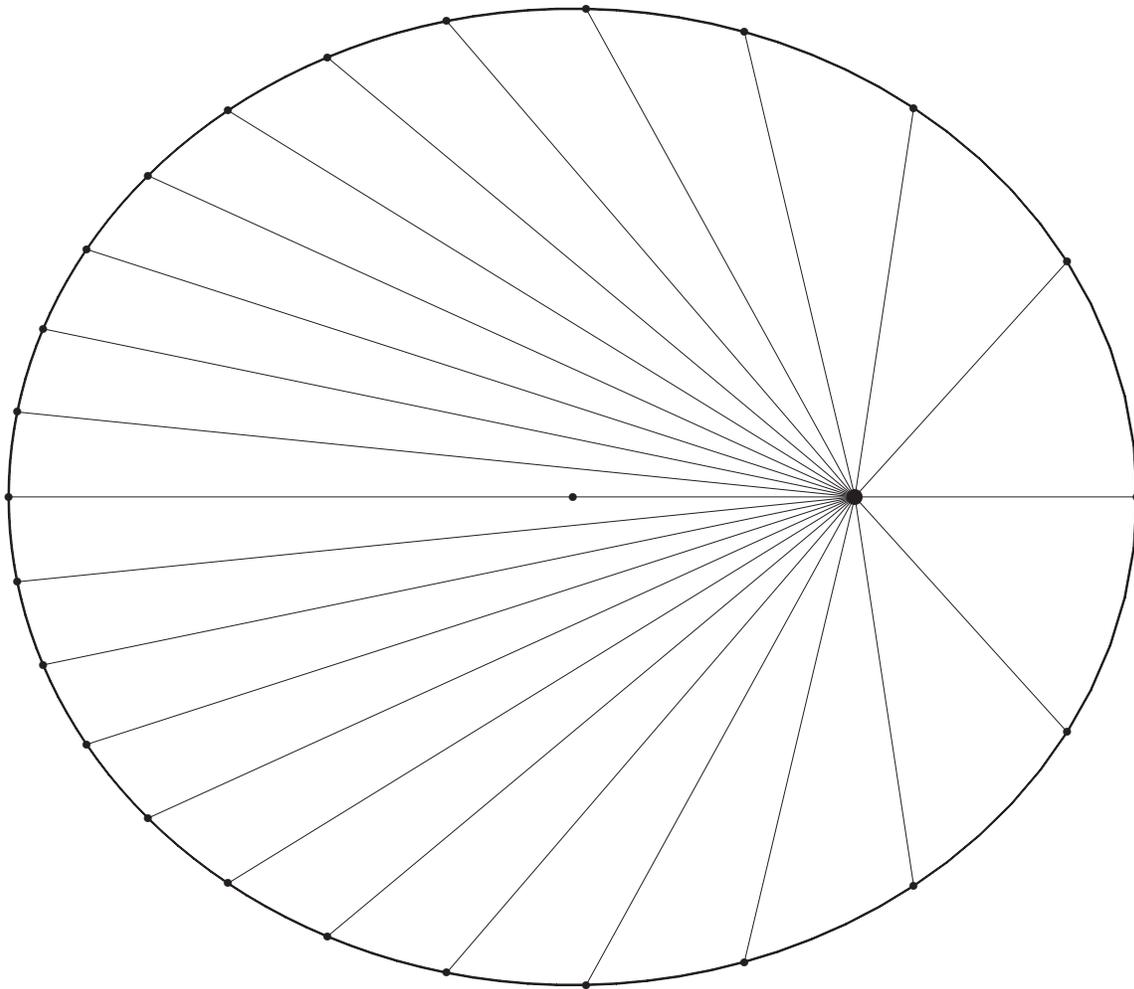
# Keplerbewegung von Mars

( $e = 0.5$ )

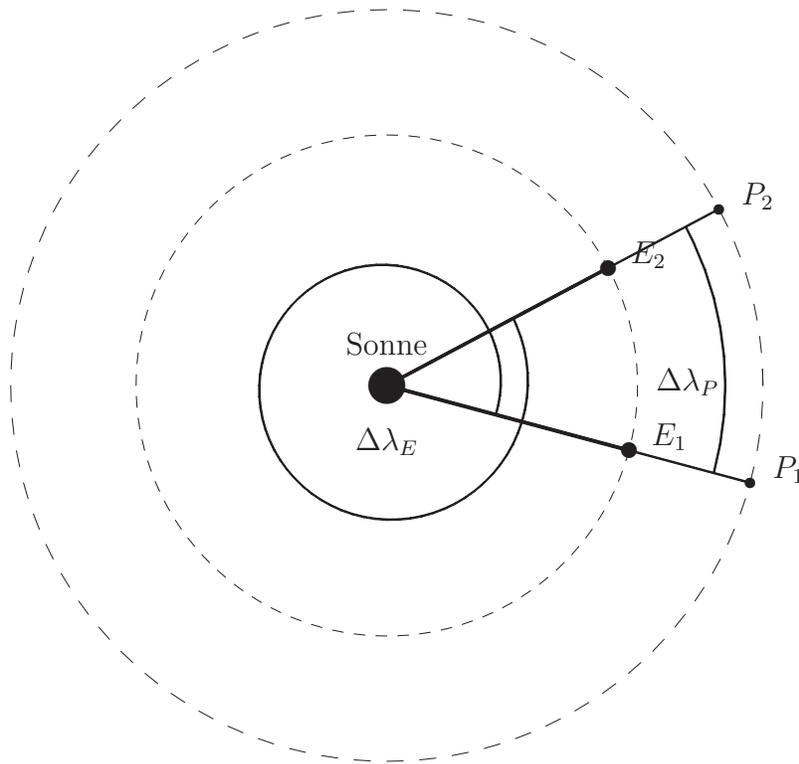


# Keplerbewegung

( $e = 0.093$ )



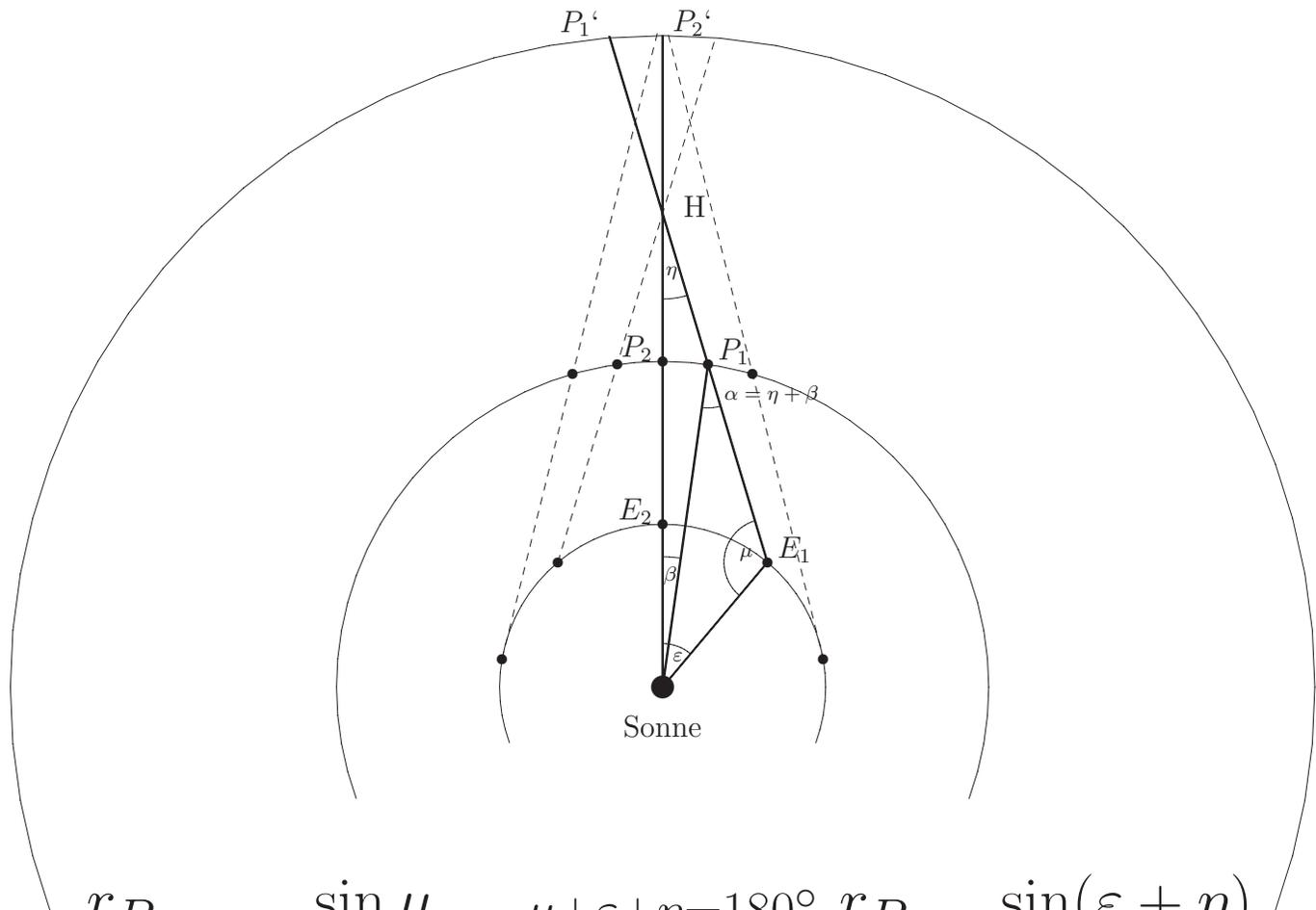
## Zusammenhang zwischen synodischer und siderischer Umlaufzeit



$$\begin{aligned} \Delta\lambda_E &= \Delta\lambda_P + 2\pi \\ \Rightarrow \frac{\Delta\lambda_E}{T_{syn}} &= \frac{\Delta\lambda_P}{T_{syn}} + \frac{2\pi}{T_{syn}} \\ \Rightarrow \frac{2\pi}{1a} &= \frac{2\pi}{T_{sid}} + \frac{2\pi}{T_{syn}} \\ \Rightarrow \frac{1}{1a} &= \frac{1}{T_{sid}} + \frac{1}{T_{syn}} \end{aligned}$$

# Bestimmung von Planetenbahnradien

aus der Beobachtung der Oppositionsposition und  
einer zusätzlichen Beobachtung während der Rückläufigkeit



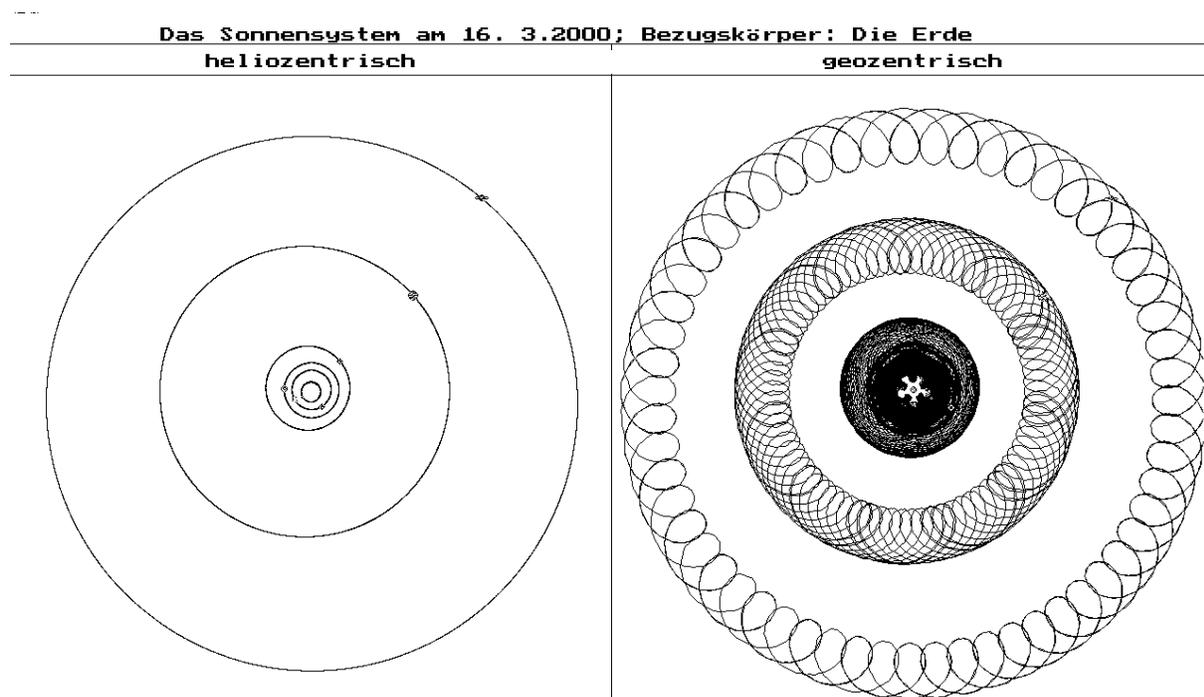
$$\frac{r_P}{r_E} = \frac{\sin \mu}{\sin(\beta + \eta)} \quad \mu + \varepsilon + \eta = 180^\circ \quad \frac{r_P}{r_E} = \frac{\sin(\varepsilon + \eta)}{\sin(\beta + \eta)}$$

Dabei sind

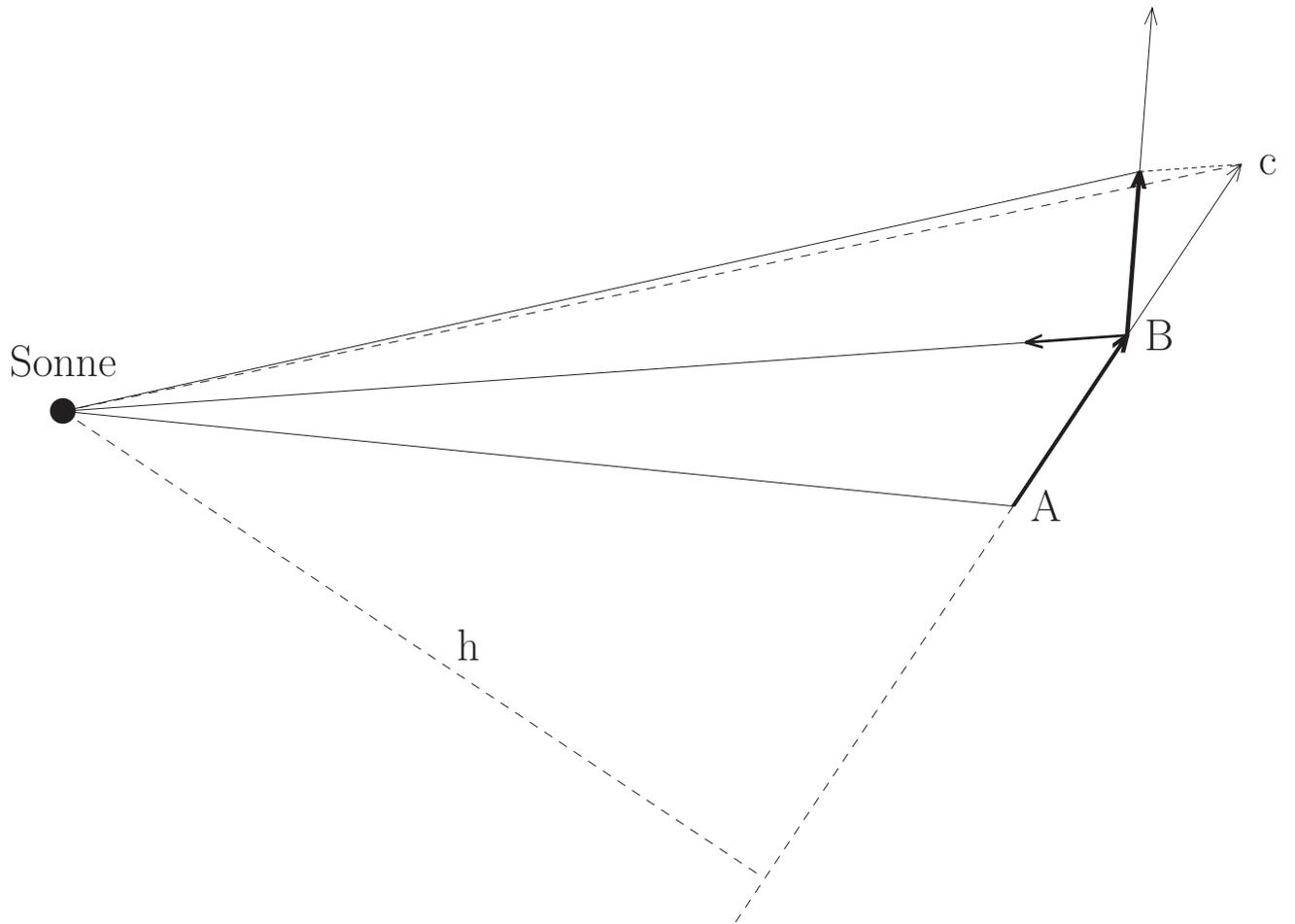
- $\eta$  die scheinbare Verschiebung des Planeten am Fixsternhimmel,
- $\varepsilon = \mu_E \Delta t$  und
- $\beta = \mu_P \Delta t$  die von Erde und Planet in der Zwischenzeit (heliocentrisch) überstrichenen Winkel.

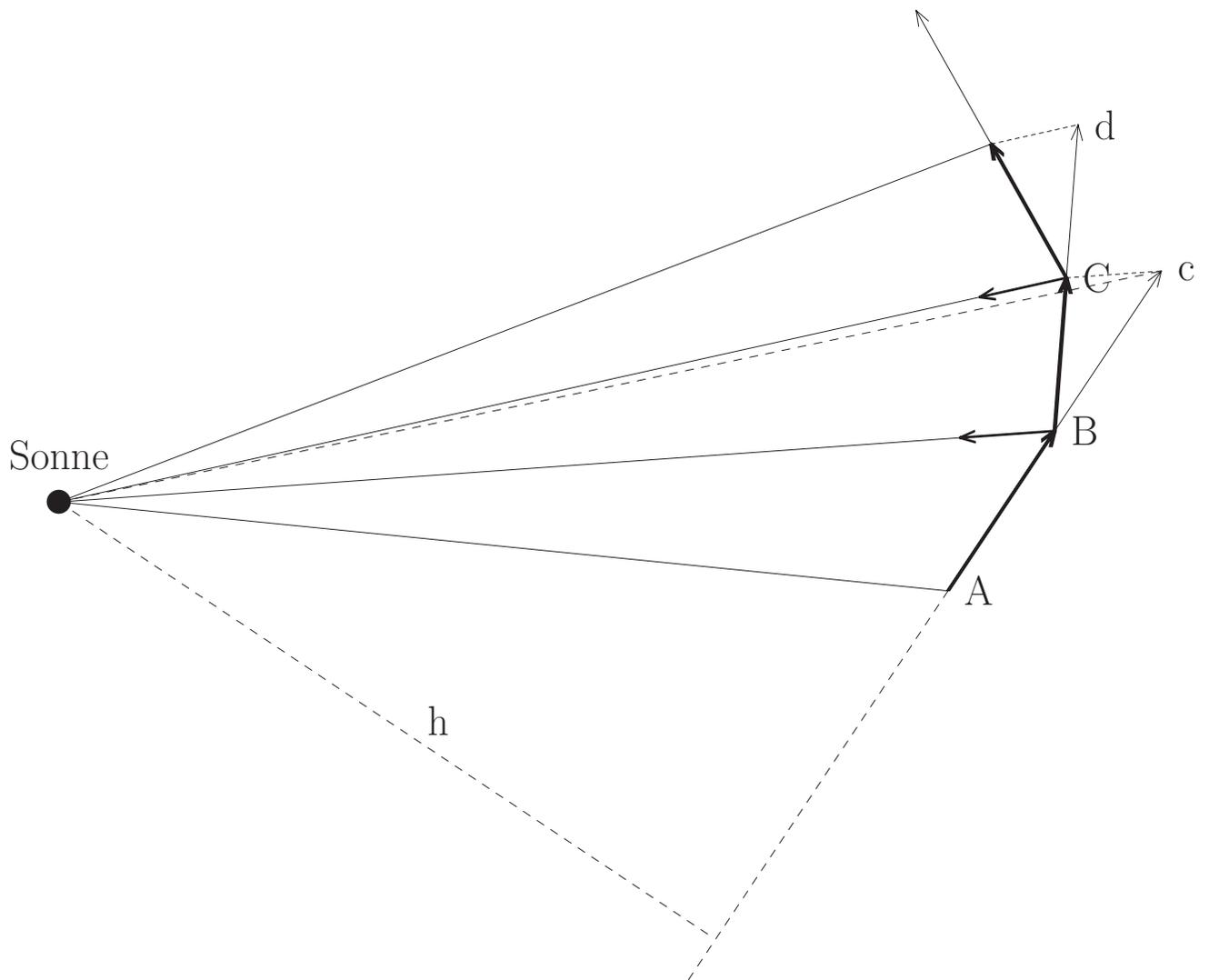
# Die Bewegung der innersten 5 Planeten

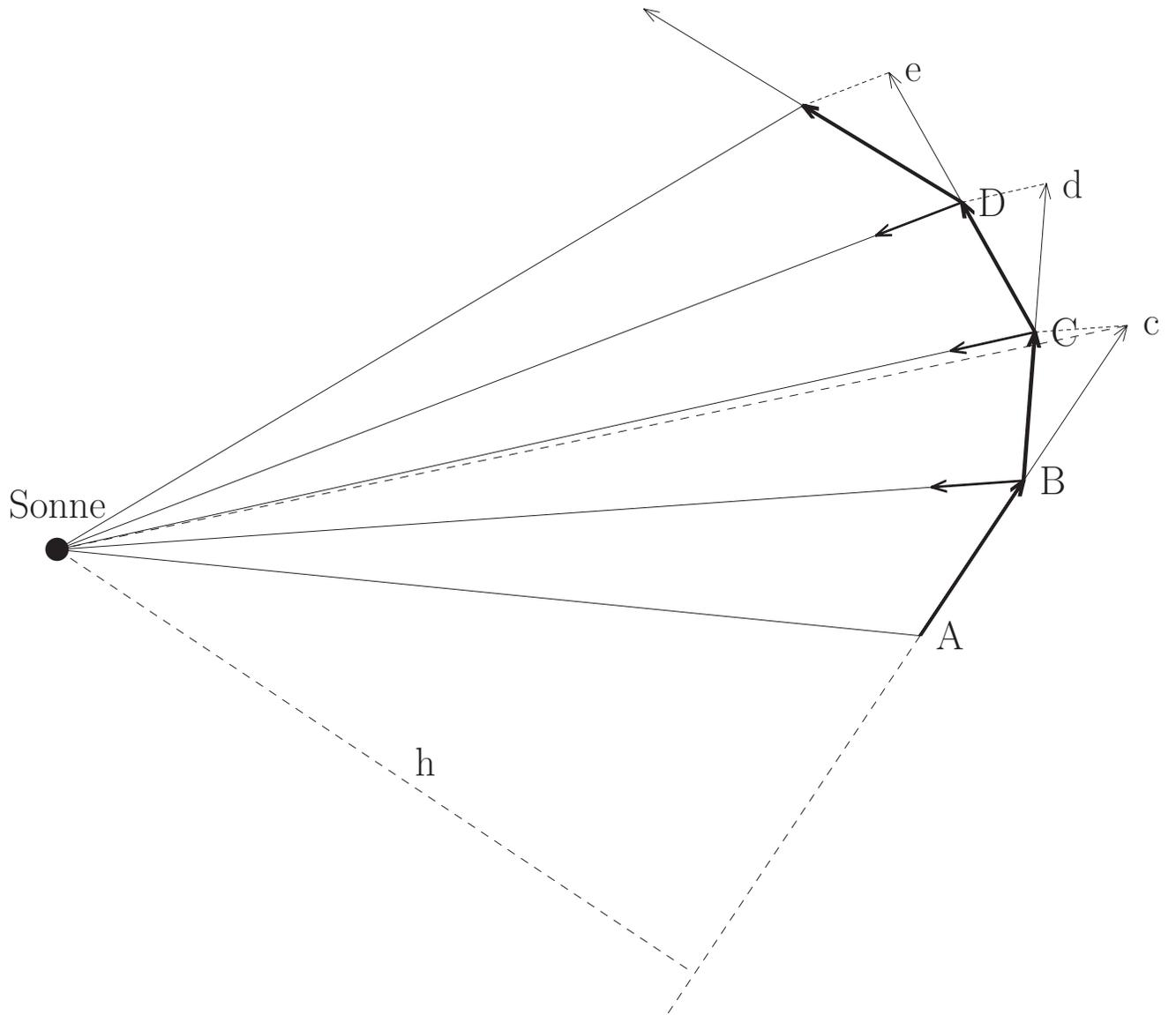
– heliozentrisch und geozentrisch betrachtet –







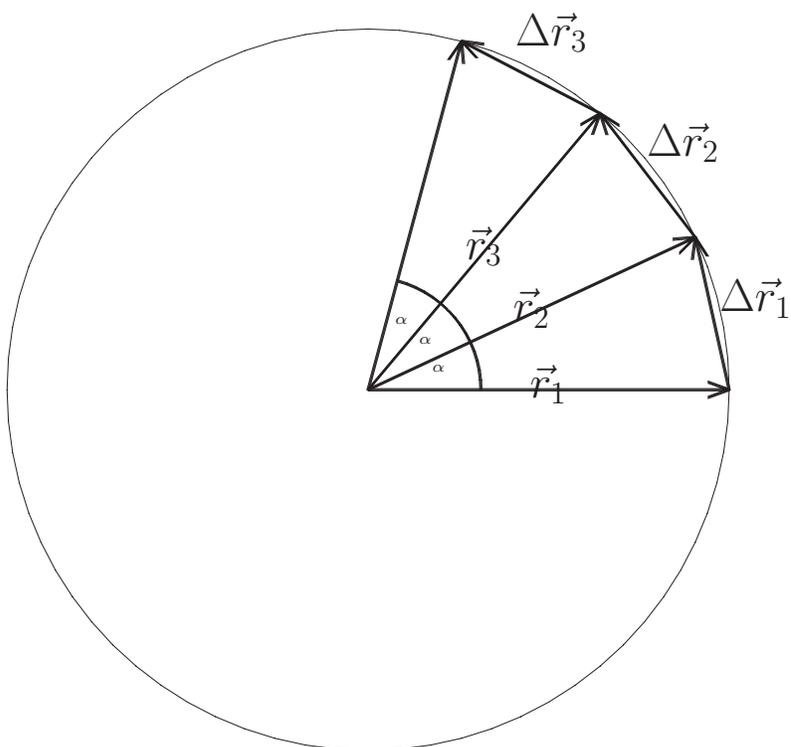




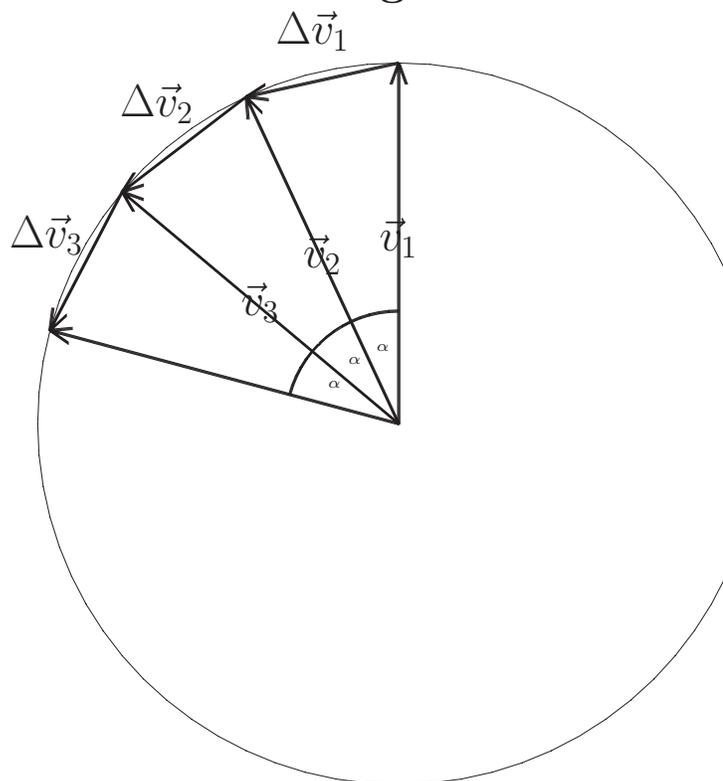


### Das 3. Kepler'sche Gesetz und das Gravitationsgesetz

$\vec{r}$ -Diagramm

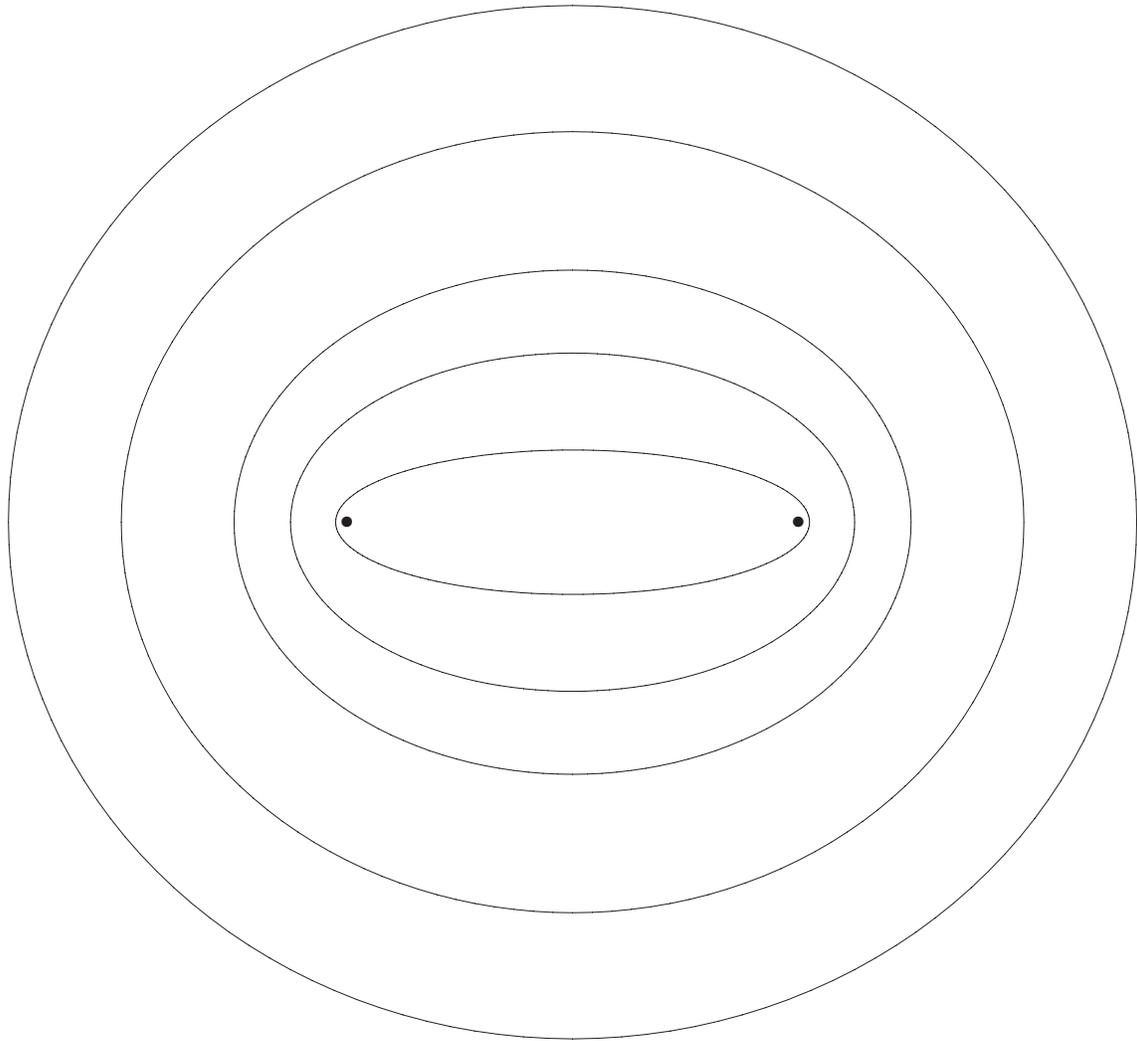


$\vec{v}$ -Diagramm

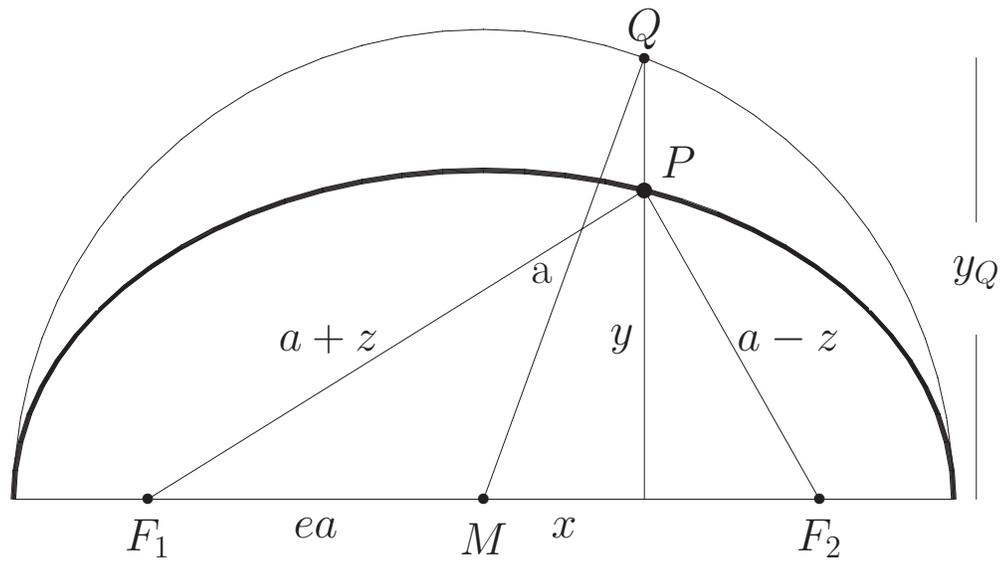


gleiche Zeitintervalle!

# Ellipsen mit verschiedener Fadenlänge

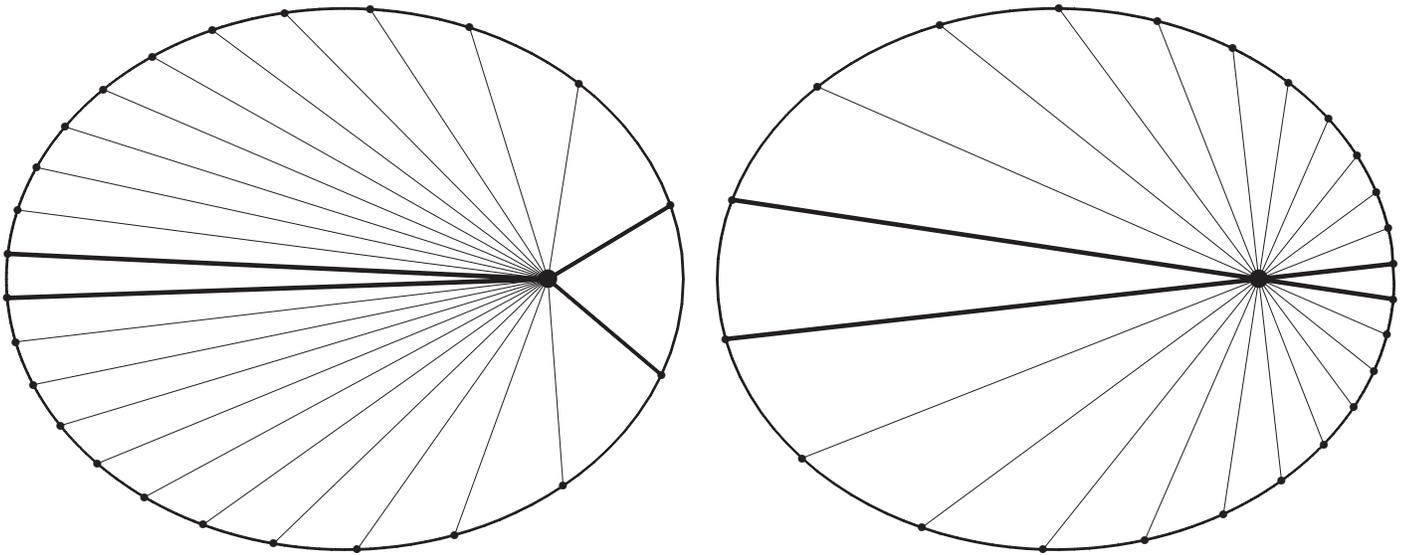


# Die Ellipse als gestauchter Kreis

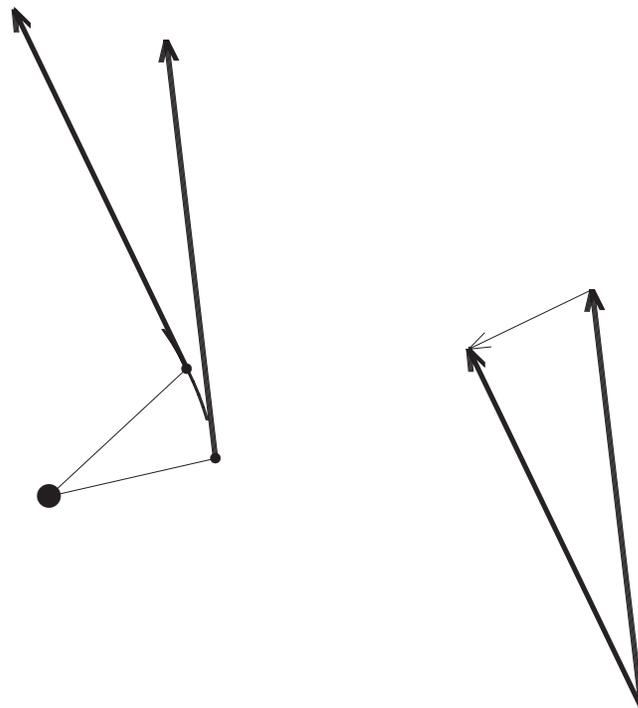




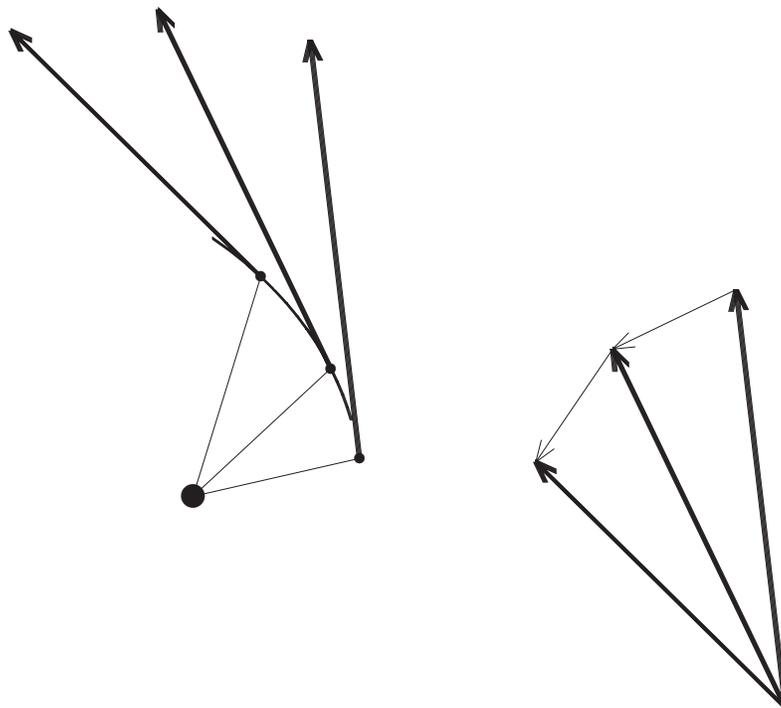
Der Übergang  
von gleichen Zeitintervallen  
zu gleichen Zentralwinkeln



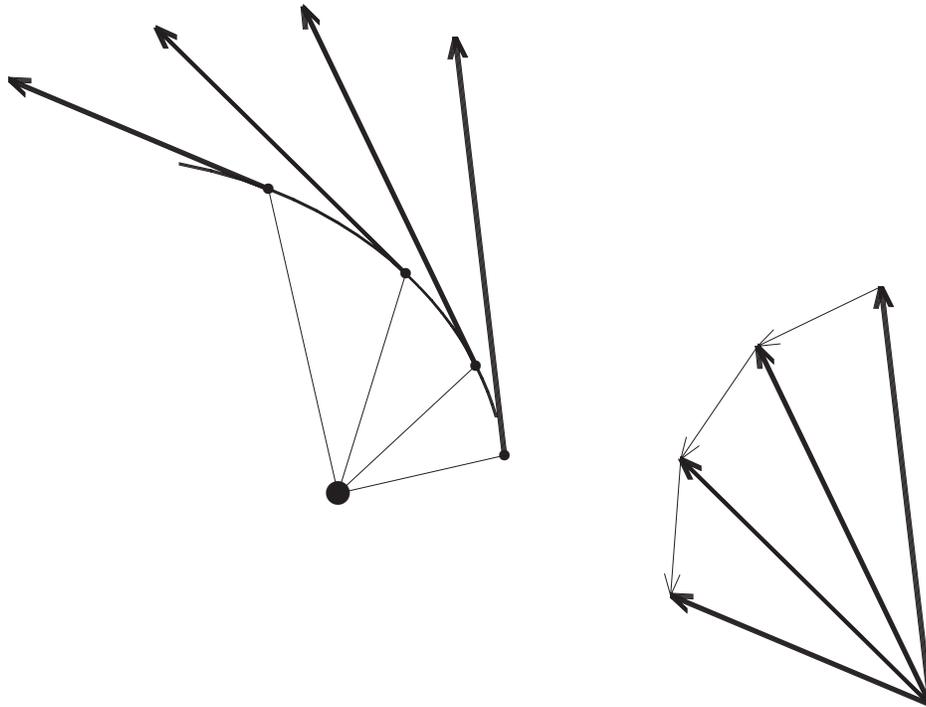
## Die Newton'sche Konstruktion der Planetenbahn für gleiche Zentralwinkel



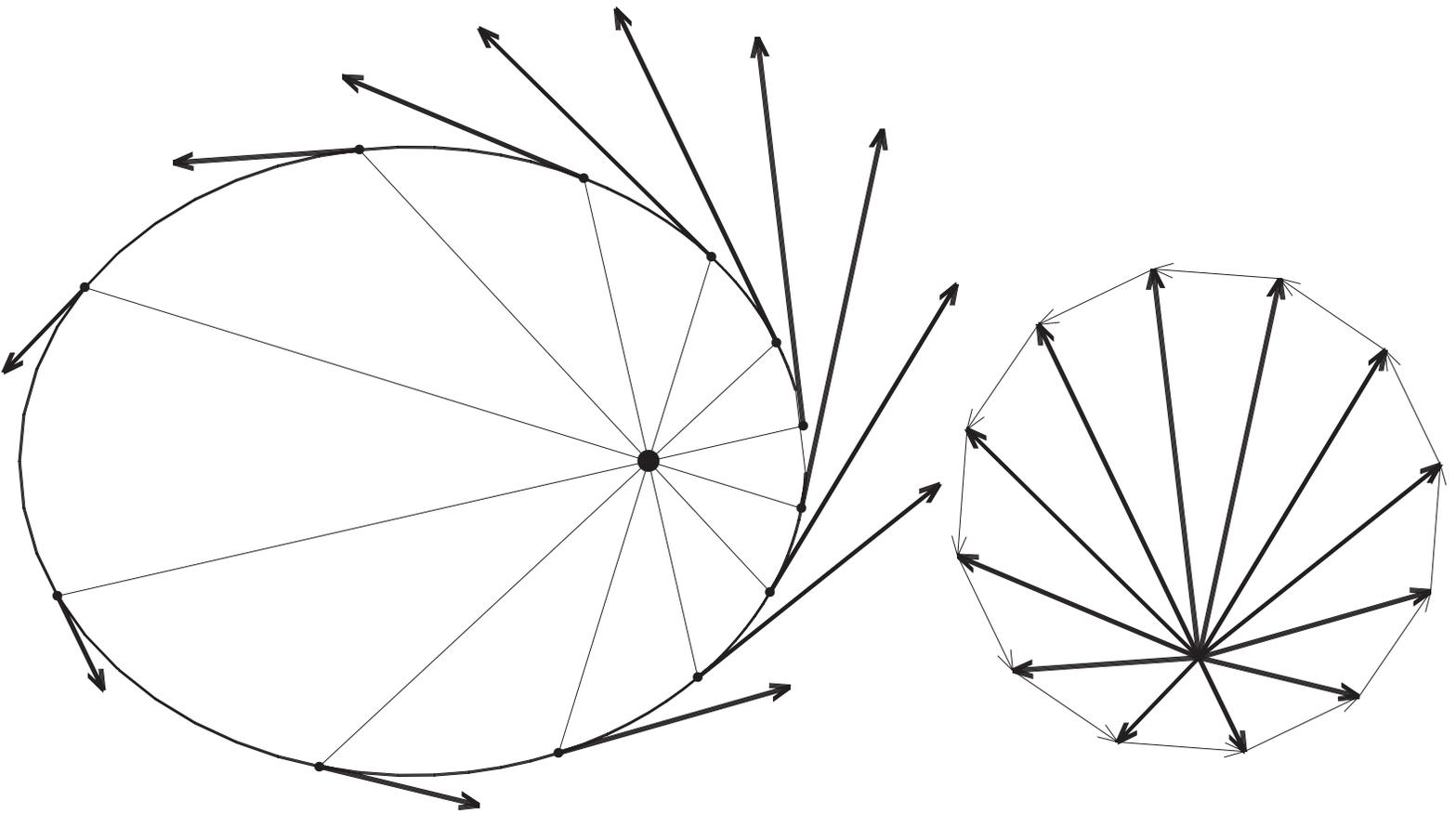
## Die Newton'sche Konstruktion der Planetenbahn für gleiche Zentralwinkel



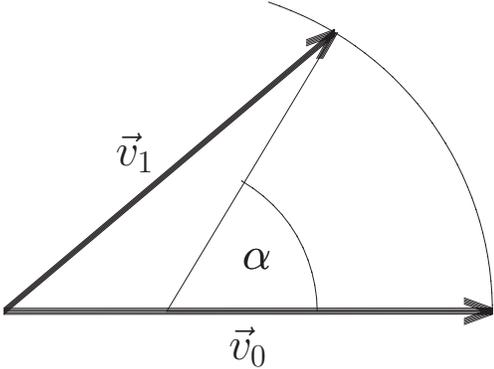
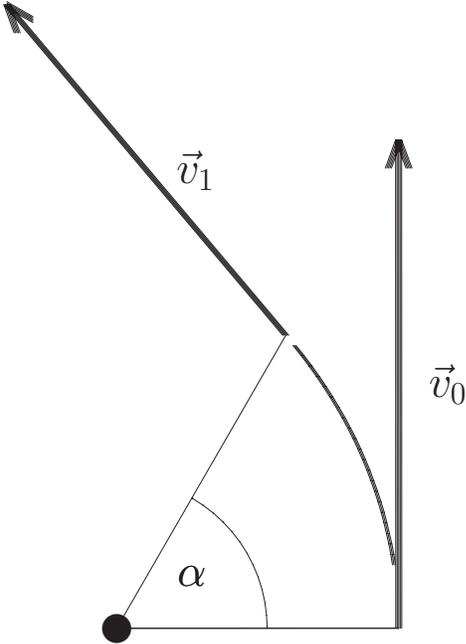
## Die Newton'sche Konstruktion der Planetenbahn für gleiche Zentralwinkel



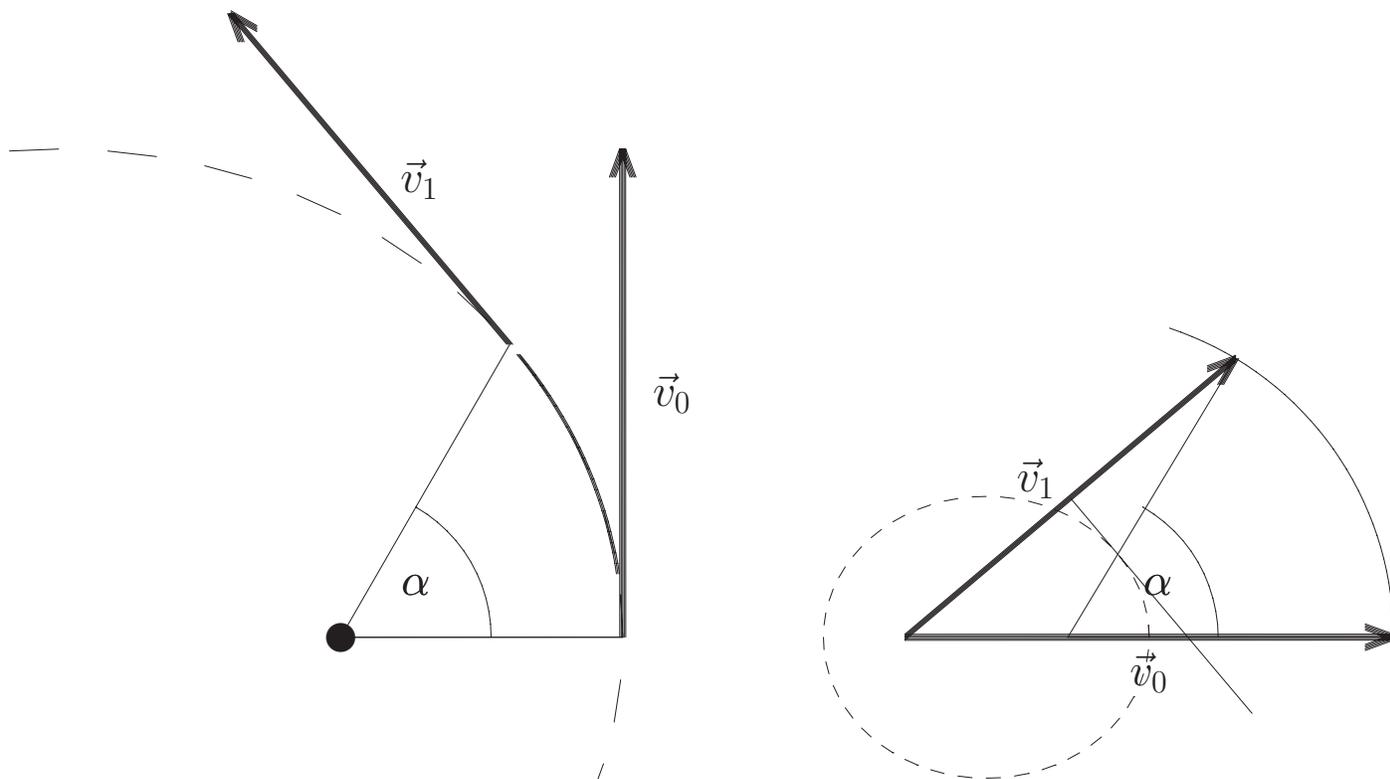
## Die Newton'sche Konstruktion der Planetenbahn für gleiche Zentralwinkel



# Die Bahnform

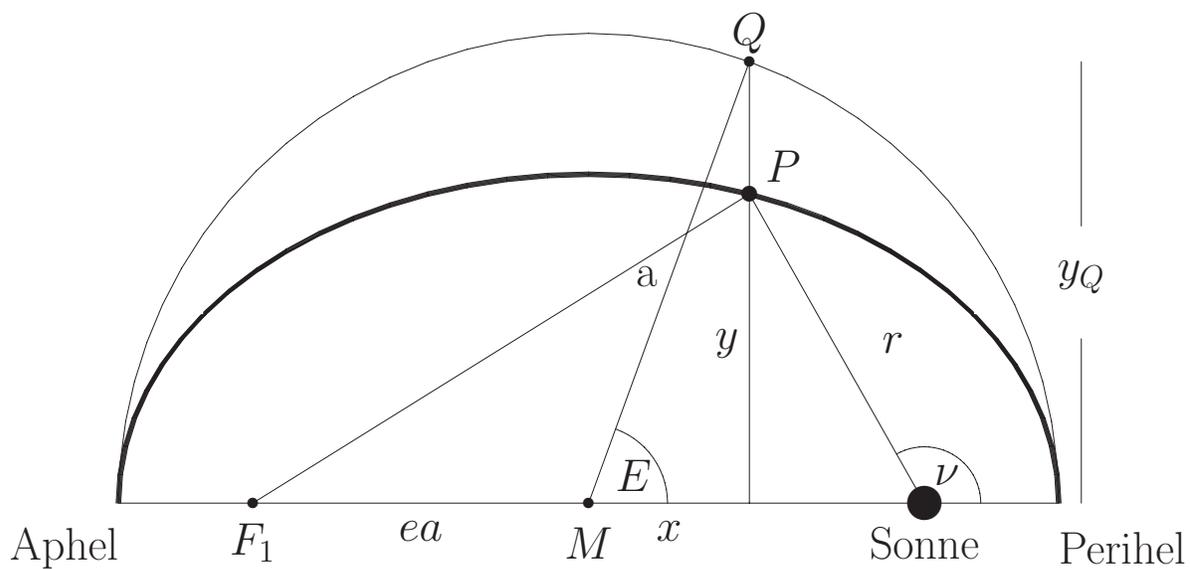


## Die Bahnform



Die Konstruktion entspricht genau der „Spiegel-Konstruktion“ für Ellipsen!

## Wahre und exzentrische Anomalie



## Die Kepler-Gleichung

