

# Wie weit ist der Mond entfernt?

## Die Mondentfernung, in 25 Stunden mit drei verschiedenen Verfahren selbst bestimmt

Udo Backhaus, Alfred Knülle-Wenzel

23. August 2017

*Die Beobachtung und Messung der Parallaxe des Mondes ist immer wieder eine faszinierende Aufgabe, für die wir uns im Ruhrgebiet und auf der Hakos-Farm in Namibia verabredeten. Was aber tun, wenn an einem der beteiligten Standorte das Wetter einen Strich durch alle Planungen macht? Es werden hier zusätzlich zwei Effekte und Verfahren vorgestellt, mit denen es möglich ist, die Entfernung des Mondes allein zu bestimmen.*

## 1 Einleitung

Die Entfernung eines astronomischen Objektes (geometrisch) zu bestimmen, bedeutet, von weit voneinander entfernten Orten *gleichzeitig* aus die Richtungen zu bestimmen, in der es „gesehen“ wird, und die Differenz  $p$  zwischen diesen Richtungen zu messen.

Eine Möglichkeit dazu ist, seine Stellung am Himmel relativ zu benachbarten Sternen zu bestimmen. Das ist möglich, indem man die mit einem Fernglas oder sogar mit bloßen Augen beobachteten Positionen in eine gute Sternkarte einzeichnet und dort die jeweiligen äquatorialen Koordinaten, Rektaszension und Deklination, oder direkt den Winkelabstand zwischen den Positionen abliest. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Objekt zu fotografieren und das Bild mit einer Sternkarte oder einem astronomischen Programm zu vergleichen. Ich habe solche internationalen Projekte mehrmals durchgeführt, am Mond in den Jahren 2000 ([1]) und 2009 ([2]).

Wenn der *lineare* Abstand  $\Delta$  zwischen den Beobachtern bekannt ist, ist es im Prinzip einfach, die Entfernung  $d$  des Mondes näherungsweise zu berechnen (Abb. 1):

$$d = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{p}{2}} \approx \frac{\Delta}{p} \quad (p \text{ im Bogenmaß}) \quad (1)$$

Dabei wird zunächst vereinfachend angenommen, dass die Verbindungslinie der beiden Beobachtungsorte senkrecht auf der Richtung zum Mond steht (siehe jedoch Anhang A.2).

## 2 Die Mondparallaxe Ruhrgebiet - Namibia

Meine Reise zur Hakos-Farm in Namibia im Jahr 2016 bot eine gute Gelegenheit, in Zusammenarbeit mit Freunden in Deutschland die Parallaxe des Mondes zu fotografieren und daraus seine Entfernung abzuleiten. In der verabredeten Nacht (22./23. Mai) und auch in den folgenden

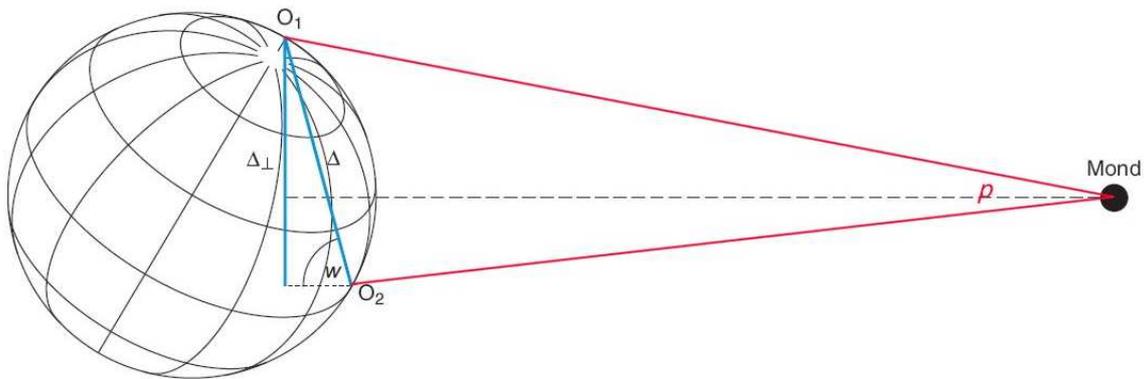


Abbildung 1: Das Prinzip der Entfernungsbestimmung durch Parallaxenmessung

Nächten war leider der Himmel über dem Ruhrgebiet mit Wolken verhangen. Aber am 29. Mai gelang doch noch eine Messung, bei der wir, um nicht an vorüberziehenden Wolken zu scheitern, den Mond zwischen 1:55 UT und 2:20 UT im Abstand von fünf Minuten fotografierten. Dabei wählten wir eine kleine Brennweite ( $f \approx 35\text{mm}$ ), um auf den Fotos in der Umgebung des Mondes Fixsterne finden und identifizieren zu können.

Außer bei einer Mondfinsternis (siehe [3]) ist es schwierig, den Mond so zu fotografieren, dass er auf dem Bild nicht überbelichtet ist, aber trotzdem Sterne auf dem Foto zu erkennen sind. Wir haben das Problem dadurch überwunden, dass wir jeweils *mit feststehender Kamera* und unveränderter Brennweite zwei Fotos unmittelbar nacheinander aufgenommen haben: eins mit sehr kurzer Belichtungszeit, um den Mond richtig zu belichten und seine Position auf dem Foto exakt messbar zu machen, ein weiteres mit langer Belichtungszeit, um Umgebungssterne sichtbar und auswertbar zu machen. Die Positionen von Mond und Sternen haben wir anschließend auf den beiden Bildern nacheinander gemessen. Anschaulicher ist es jedoch, die beiden Digitalbilder mit einem Bildbearbeitungsprogramm zu kombinieren, z. B. durch Differenzbildung (s. Abb. 2). Wir haben dazu das Public-Domain-Programm **ImageJ** verwendet.

Entscheidend ist dabei, dass sich die Orientierung der Kamera zwischen den beiden Aufnahmen nicht ändert (z. B. bei der Umstellung der Belichtungszeit) und dass die beiden Aufnahmen so schnell aufeinander folgen, dass die zwischenzeitliche Bewegung des Mondes vernachlässigt werden kann. Beides gelingt am besten, wenn man die Kamera von einem Laptop aus fernbedienen kann.

Mit dem Astronomieprogramm **Guide** haben wir dann die Sterne des Umfeldes identifiziert. Das ist erforderlich, wenn man die Bilder kombinieren will, aber überflüssig, wenn nur die Mondkoordinaten mit einem Astrometrie-Programm bestimmt werden sollen. Abbildung 3 zeigt oben die so um 2:10 UT gewonnenen Aufnahmen aus Bochum und Namibia. Das Kombinationsbild haben wir erzeugt, indem wir das Namibia-Bild anhand der identifizierten Sterne mit **ImageJ** geeignet skaliert, gedreht und verschoben haben. Das Bild zeigt nicht nur die parallaktische Verschiebung des Mondes, sondern – anhand der ursprünglich horizontalen Beschriftungen – auch die unterschiedliche Orientierung der beiden Beobachter (bzw. ihrer Horizonte).

Es ist reizvoll, aber nicht ganz einfach, die Positionen des Mondes auf den Bildern selbst zu bestimmen (siehe Anhang A.1). Wir haben deshalb die Bilder mit einem Astrometrie-Programm, im Internet z. B. mit **Astrometry.net**, auswerten lassen. Es ist erstaunlich, wie viele Sterne dabei identifiziert werden. In dem dabei erzeugten Bild konnten wir uns dann mit Hilfe des Programms



Abbildung 2: Der Mond von Namibia aus fotografiert; oben links: lange belichtet (1 s), oben rechts: kurz belichtet (1/2000 s), unten: Differenz der beiden Fotos



Beobachtungsort	geogr. Koordinaten		$\Delta$	Mondkoordinaten		
	$\varphi$	$\lambda$		$\alpha$	$\delta$	$p$
Hakos Farm, Namibia	$-23.14^\circ$	$16.33^\circ$		$334.73^\circ$	$-9.02^\circ$	
Bochum	$51.48^\circ$	$7.22^\circ$	$1.22R_E$	$334.63^\circ$	$-10.14^\circ$	$1.12^\circ$

Tabelle 1: Ergebnisse der Parallaxenmessung Bochum-Namibia um 2:10 UT

`AstroImageJ` die Koordinaten des Mondes anzeigen lassen. Schließlich berechneten wir aus den von Bochum und Namibia aus gemessenen Mondkoordinaten mit Hilfe des Seitenkosinussatzes den Parallaxenwinkel  $p$ :

$$\cos p = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Tabelle 1 zeigt die Ergebnisse.

Aus dem Parallaxenwinkel ergibt sich nach (1) die Entfernung des Mondes zu  $62.4 R_E$  ( $62.4R_E$ ). Er ist im Vergleich zum korrekten Wert ( $59.2R_E$ ) um etwa 5% zu groß. Die in (1) einfließende Annahme, die Verbindungsgerade stehe senkrecht auf der Richtung zum Mond, ist hier jedoch nicht erfüllt. Es kommt aber auf den projizierten Abstand zwischen den Beobachtungsorten an, der zum Zeitpunkt der Aufnahmen nur  $\Delta_\perp = 1.12R_E$  betrug (s. Anhang A.2). Damit würde sich der Mondabstand zu  $57.3R_E$  ergeben.

Mit der korrekten Rechnung, in der etwas Vektorrechnung verwendet wird (siehe Anhang A.2), ergibt sich die Mondentfernung aus den gemessenen Mondpositionen zu  $d_M = 57.5R_E$ . Die Abweichung vom korrekten Wert beruht darauf, dass die auf den Fotos gemessenen Mondpositionen um etwa  $0.1^\circ$  von den wahren Werten abweichen.

***Aus der Parallaxenmessung von Bochum und Namibia aus ergab sich am 29. Mai 2016 die geozentrische Mondentfernung zu***

$$D_{\text{geoz}} = 57R_E \pm 3\%.$$

### 3 Die tägliche Parallaxe des Mondes

In der Nacht, in der die Zusammenarbeit mit den Freunden im Ruhrgebiet nicht zustande kam, nutzte ich die Gelegenheit zu zwei Versuchen, die Entfernung des Mondes *allein* zu messen. Bei der Messung der „täglichen Parallaxe“ eines Objektes lässt man sich selbst durch die Drehung der Erde an einen weit entfernten Ort „transportieren“. Die Messmethode wird jedoch durch die Eigenbewegung des Mondes erschwert. Wenn man einige Stunden später wieder zum Mond schaut, hat er sich auf seiner Bahn um die Erde weiterbewegt. Der Unterschied zwischen den beiden beobachteten Mondpositionen  $(\alpha_1, \delta_1)$  und  $(\alpha_2, \delta_2)$  ist deshalb eine Überlagerung aus Eigenbewegung und Parallaxe.

Die Eigenbewegung kann jedoch dadurch abgetrennt werden, dass die Position des Mondes zweimal im Abstand eines *Mondtages* (24h50min) gemessen wird. Dann ist die Konstellation von Erdmittelpunkt, Mond und Beobachter bei beiden Messungen dieselbe, und die beobachtete Richtungsänderung beruht allein auf der Eigenbewegung des Mondes. Nimmt man dann an, dass sich der Mond in der Zwischenzeit gleichförmig bewegt hat, können für die Zwischenzeit durch Interpolation „parallaxenfreie“ Mondpositionen berechnet werden.

Ich erläutere das Verfahren am Beispiel meiner Messungen am 22./23. Mai, deren Ergebnisse in Tabelle 2 zusammengestellt sind. Der Mond wurde an zwei aufeinander folgenden Abenden zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_3$  und am frühen Morgen dazwischen zur Zeit  $t_2$  wie in Abschnitt 2 beschrieben

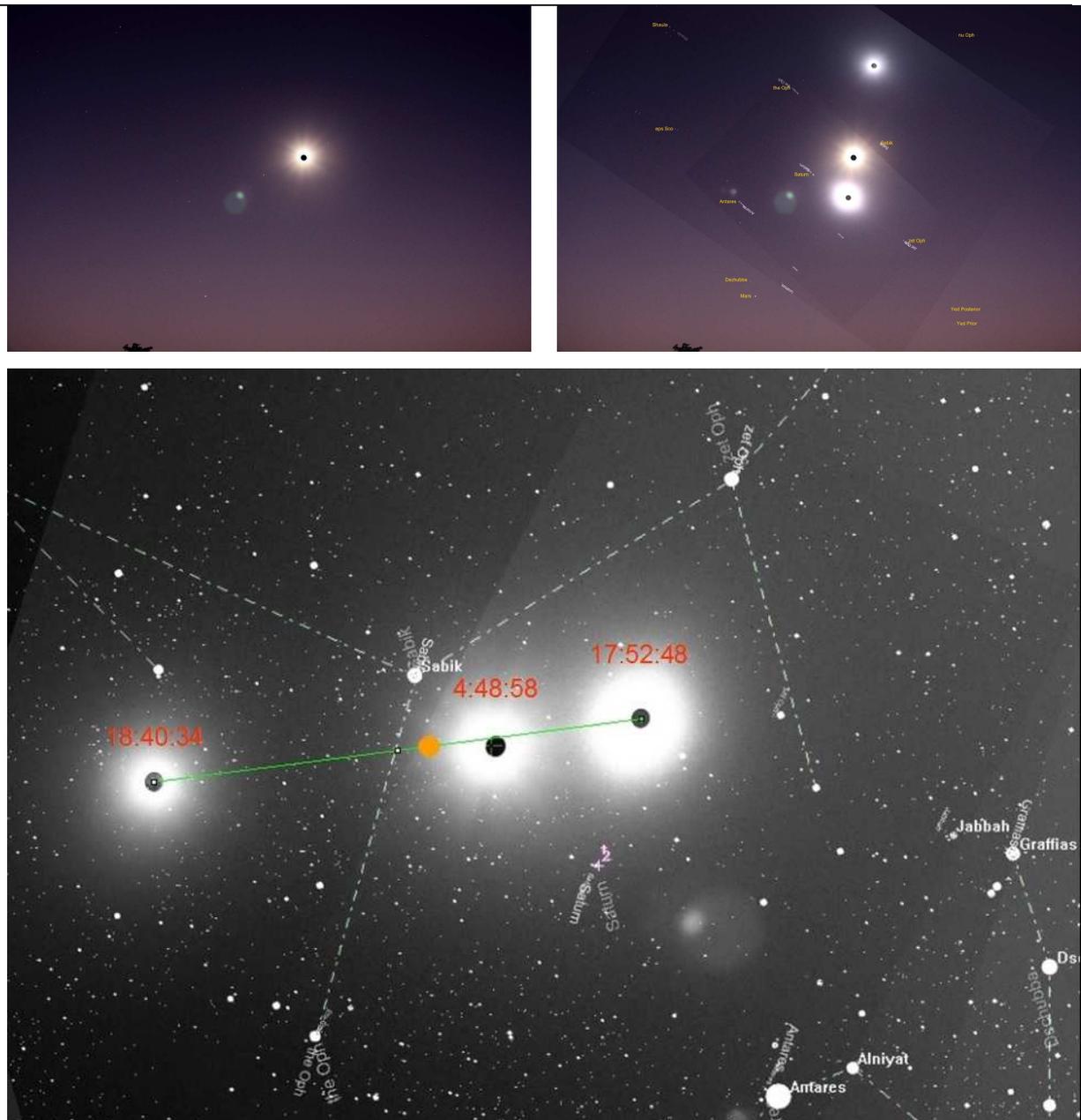


Abbildung 4: In Namibia zur Messung der täglichen Parallaxe aufgenommene Fotos mit Kennzeichnung identifizierter Umgebungssterne; oben links: Differenzbild 4:48:58 UT, oben rechts: Überlagerung der drei Aufnahmen, unten: eingeordnet durch Überlagerung mit dem entsprechenden Sternfeld (Guide). Zu erkennen ist die Eigenbewegung des Mondes von Westen nach Osten. Nachträglich wurde die Position eingezeichnet, die sich durch lineare Interpolation aus den Messungen 1 und 3 ergibt.

geogr. Position		Uhrzeit	Mondposition				
$\varphi$	$\lambda$		$\alpha$	$\delta$	$\Delta$	$p$	
$-23.14^\circ$	$16.33^\circ$	17:52:48 UT	$251.55^\circ$	$-16.85^\circ$			
$-23.14^\circ$	$16.33^\circ$	4:48:58 UT	$255.46^\circ$	$-17.52^\circ$			
$-23.14^\circ$	$-147.71^\circ$	4:48:58 UT	$257.38^\circ$	$-17.34^\circ$	$1.82R_E$	$1.82^\circ$	lin. interpoliert
$-23.14^\circ$	$16.33^\circ$	18:40:34 UT	$264.77^\circ$	$-17.96^\circ$			

Tabelle 2: Gemessene Mondpositionen und daraus abgeleitete interpolierte Mondposition zur Bestimmung der täglichen Parallaxe.

fotografiert (Abb. 4). Wie lässt sich aus den beobachteten Mondpositionen ein Parallaxenwinkel ableiten?

Um die Überlegungen und Rechnungen so einfach wie möglich zu halten, sei zunächst angenommen, dass sich Rektaszension und Deklination des Mondes während des gesamten Zeitraumes gleichförmig ändern (siehe jedoch Anhang A.3). Dann kann man, ausgehend von der zur Zeit  $t_1$  gemessenen Position, durch lineare Interpolation „parallaxenfreie“ Mondpositionen berechnen.

$$\alpha'(t) = \alpha(t_1) + \frac{\alpha(t_3) - \alpha(t_1)}{t_3 - t_1}, \quad \delta'(t) = \delta(t_1) + \frac{\delta(t_3) - \delta(t_1)}{t_3 - t_1} \quad (2)$$

Diese Mondpositionen könnten von einem „virtuellen“ Beobachter gemessen werden, dessen Position sich *im Raum* nicht ändert, der also an der Rotation der Erde nicht teilnimmt. Bezüglich des realen Beobachtungsortes würde er sich nach Westen bewegen und auf dem zugehörigen Breitenkreis pro Stunde  $15^\circ$  überstreichen. Seine geografische Länge  $\lambda_v$  würde sich gemäß

$$\lambda_v(t) = \lambda_B - \frac{15^\circ}{h}(t - t_1) \quad (3)$$

gegenüber der geografischen Länge  $\lambda_B$  des Beobachtungsortes verringern (Abb. 5). Aus der Längeneränderung und der geografischen Breite lässt sich der lineare Abstand  $\Delta$  zwischen den beiden Orten berechnen.

In Abbildung 4 ist die „parallaxenfreie“ Mondposition ( $\alpha'(t_2), \delta'(t_2)$ ) orange eingezeichnet. Die tatsächlich zu dieser Zeit gemessene Mondposition ist deutlich nach Westen dagegen verschoben, weil sich der Beobachter nach der Messung 1 weit nach Osten bewegt hat. Aus der Basislänge  $\Delta$  und dem gemessenen Parallaxenwinkel  $p = 1.8^\circ$  ergibt sich nach (1) die Entfernung des Mondes zu 57 Erdradien.

Damit ist es gelungen, die Mondentfernung von einem festen Standort aus allein zu messen. Der gemessene Parallaxenwinkel ist gegenüber dem wahren Wert ( $p = 1.65^\circ$ ) um 10% zu groß. Diese Abweichung beruht nur zu einem kleinen Teil auf den hier gemachten Vereinfachungen. Da sich mit dem im Anhang beschriebenen Verfahren ein fast perfekter Wert für die Mondentfernung ergibt, wenn die Rechnungen mit den wahren statt mit den gemessenen Mondpositionen durchgeführt werden, sind anscheinend die gemessenen Positionen nicht genau genug: Der Parallaxenfehler liegt in der Größenordnung der Unsicherheit bei den einzelnen Positionsmessungen.

*Aus der Messung der täglichen Parallaxe des Mondes am 22./23. Mai 2016 ergab sich seine geozentrische Entfernung zu*

$$D_{\text{geoz}} = 57 \pm 10\%,$$

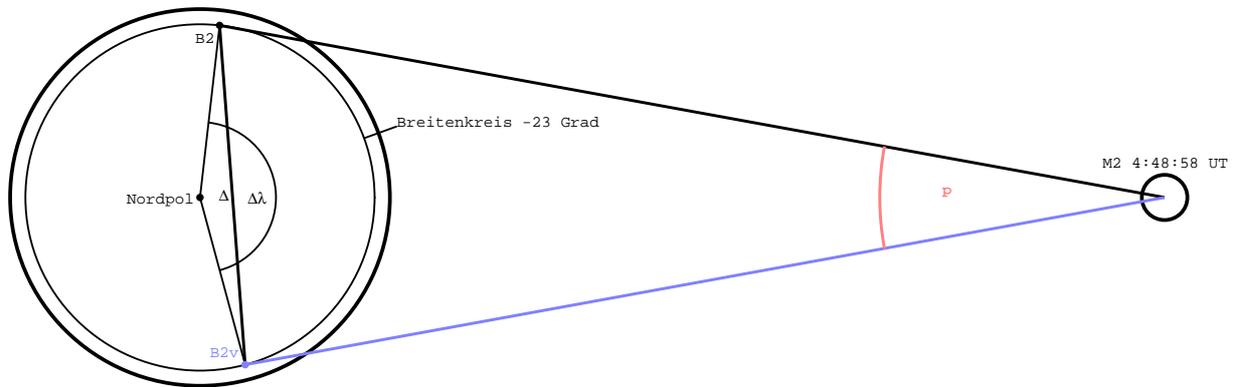


Abbildung 5: Das Prinzip der Bestimmung der täglichen Parallaxe. Eingezeichnet sind (schwarz) die Messung zur Zeit  $t_2$  und (blau) die für dieselbe Zeit aus den Messungen 1 und 3 berechnete Messung des „virtuellen“ Beobachters, der seit Messung 1 nicht an der Erddrehung teilgenommen hat. Die Neigung der Erdachse gegen die Mondbahnebene wird vernachlässigt.

## 4 Die Größenänderung des Mondes

Der aufgehende Vollmond erscheint uns im Vergleich zum hoch am Himmel stehenden Mond riesig. Dabei muss es sich um eine Täuschung unserer Wahrnehmung handeln – die sogenannte *Mondillusion* ([4]). Denn objektiv trifft das Gegenteil zu: Zwischen Aufgang und Kulmination bewegt sich der Beobachter aufgrund der Erddrehung auf den Mond zu, der Winkeldurchmesser des Mondes muss dabei zunehmen. Im Extremfall, zwischen Aufgang und Zenitdurchgang des Mondes, ändert sich der Abstand des Beobachters vom Mond ungefähr um einen Erdradius. Bei einer Mondentfernung von etwa 60 Erdradien vergrößert sich dabei der Winkeldurchmesser um 1.6%. Kann man den Effekt auf Mondfotos messen und daraus die Mondentfernung ableiten? Im Grenzfall bilden der Erdmittelpunkt, der Beobachtungsort bei Mondaufgang und der Mond ein rechtwinkliges Dreieck (s. Abbildung 6), sodass für die beiden Entfernungen zwischen Beobachter und Mond, die *topozentrischen* Mondentfernungen  $D_{topoA}$  und  $D_{topoZ}$ , gilt:

$$\frac{D_{topoA}^2}{D_{topoZ}^2} = \frac{D_{geoz}^2 - R_E^2}{(D_{geoz} - R_E)^2} = \frac{D_{geoz} + R_E}{D_{geoz} - R_E}.$$

Die scheinbare Größe des Mondes, d. h. sein Winkeldurchmesser  $w$ , ändert sich umgekehrt proportional zu seiner Entfernung,

$$\alpha = \frac{w_Z}{w_A} = \frac{D_{topoA}}{D_{topoZ}}.$$

Damit lässt sich die geozentrische Entfernung des Mondes  $D_{geoz}$  auf das Verhältnis  $\alpha$  der gemessenen Winkeldurchmesser zurückführen:

$$\frac{D_{geoz}}{R_E} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \quad (4)$$

In meiner ersten Nacht in Namibia, 22./23. Mai 2016, kulminierte der noch fast volle Mond nahe beim Zenit – eine ideale Gelegenheit für den Versuch, seine Größenänderung zu dokumentieren und zu messen. Ich fotografierte den Mond kurz nach Aufgang um 18:32 UT und kurz vor seinem Höchststand um 23:09 UT. Dabei benutzte ich eine feststehende Kamera mit einem Spektiv

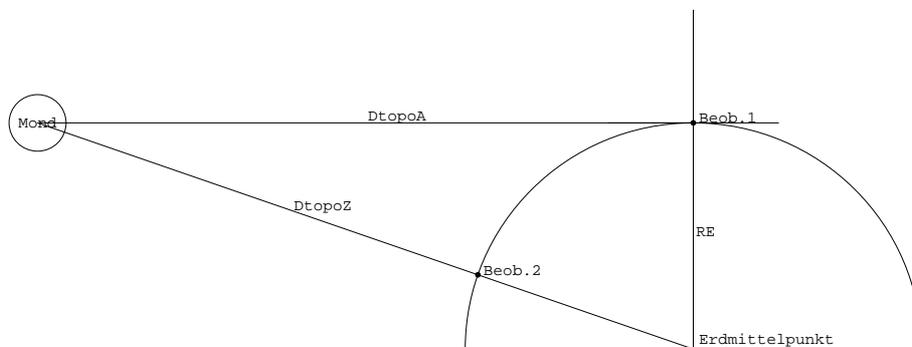


Abbildung 6: Das Dreieck Mond-Erdmittelpunkt-Aufgangspunkt ist rechtwinklig.

(effektive Brennweite  $f = 800\text{mm}$ ). Die mit meinem Pendelquadranten gemessenen Mondhöhen betragen dabei  $h_1 = 8^\circ$  und  $h_2 = 80^\circ$ .

Auf den Fotos (Abb. 7, oben) kann man in der hier gezeigten Verkleinerung, anders als am Monitor, zunächst keinen Größenunterschied erkennen. Deshalb habe ich beide Fotos eingenordet, nachdem ich das erste Bild vertikal etwas gestreckt hatte, um die Abplattung des gerade aufgegangenen Mondes durch atmosphärische Lichtbrechung zu kompensieren. Die Überlagerung der beiden Bilder (Abb. 7, unten) zeigt dann, dass der Mond bei seiner Kulmination deutlich größer ist als kurz nach Aufgang.

Lässt sich aus dem Effekt die Entfernung des Mondes ableiten?

Auf den Original-Fotos habe ich die Pixelradien des Mondes zu  $r_1 = 813Px$  und  $r_2 = 824Px$  gemessen. Mit (4) ergibt sich daraus ein Mondabstand von  $74.4R_E$ . Er ist verglichen mit dem wahren Abstand von  $62.9R_E$  um fast 20% zu groß. Allerdings habe ich den Mond weder direkt am Horizont noch genau im Zenit fotografiert. Bei Berücksichtigung der Mondhöhen (s. Anhang A.4) ergibt sich mit Gleichung (13) aus den gemessenen Größen die Mondentfernung zu  $62.9R_E$  – ein perfekter Wert.

Allerdings habe ich dabei auch Glück gehabt. Der Wert für die Mondentfernung hängt sehr empfindlich von den gemessenen Mondradien ab, und diese können höchstens auf ein Pixel genau gemessen werden. Schon bei einem Verhältnis von  $\alpha = \frac{825}{813}$  hätte sich eine Entfernung von  $57.7R_E$  ergeben. Es scheint mir deshalb ehrlich zu sein, diese Messunsicherheit zu berücksichtigen und das Ergebnis der Messung folgendermaßen anzugeben:

*Aus der Änderung der scheinbaren Größe des Mondes zwischen Aufgang und Kulmination am 22. Mai 2016 ergab sich seine geozentrische Entfernung zu*

$$D_{\text{geoz}} = 63R_E \pm 10\%,.$$

## 5 Fazit

Es hat sich gezeigt, dass es mit den drei hier vorgestellten Verfahren, bei optimalen Bedingungen innerhalb von 25 Stunden, gelingen kann, die Mondentfernung zu messen. Die beiden Verfahren zur Messung der Parallaxe führen zu recht befriedigenden Ergebnissen. Die Beobachtung und

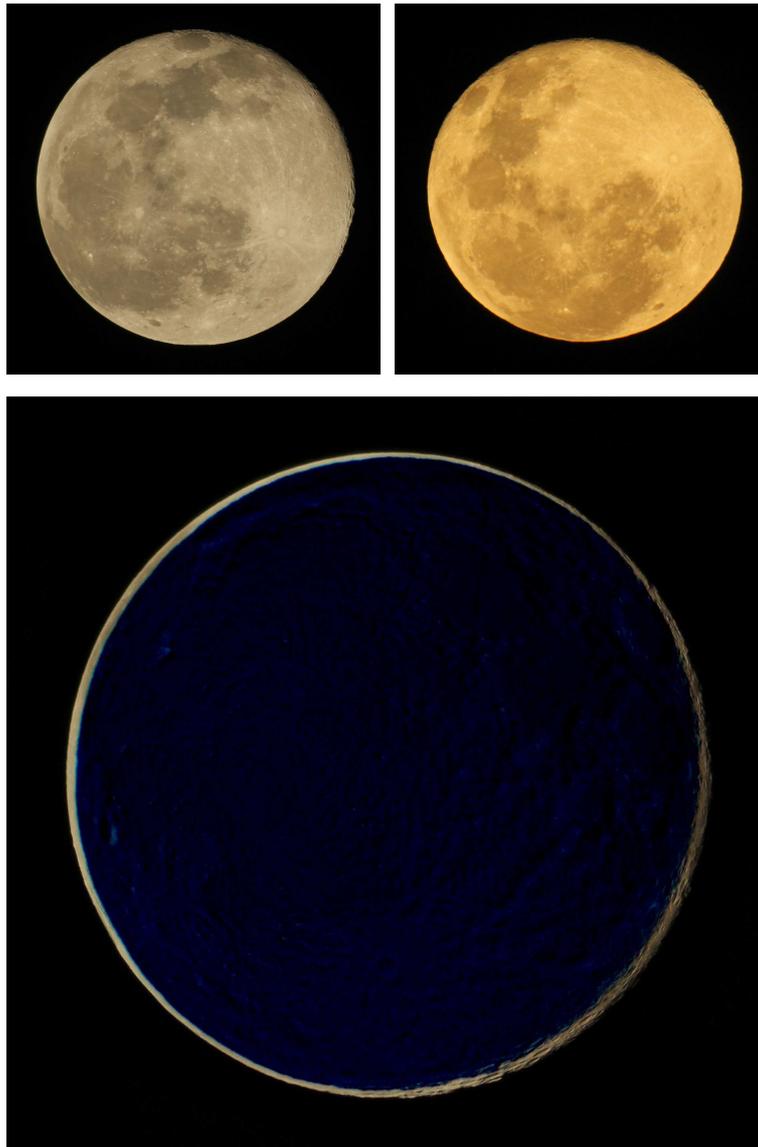


Abbildung 7: Vergleich der Größe des Mondes in verschiedenen Höhen über dem Horizont. oben links: kurz nach Aufgang, oben rechts: nahe der Kulmination, unten: Überlagerung der beiden Bilder.

Auswertung der Größenänderung des Mondes ist dagegen wohl eher wegen des überraschenden Effektes und der zugrunde liegenden Idee interessant.

Die Anregung, ganz genau auf den Mond zu achten und zu versuchen, selbst Hinweise auf seine endliche Entfernung zu finden, habe ich vor vielen Jahren durch den auch heute noch – insbesondere für Eltern und Lehrer – sehr lesenswerten Aufsatz von 1962 „Wie weit ist der Mond entfernt?“ des Didaktikers *Martin Wagenschein* erhalten ([5]). Er enthält neben den Beschreibungen von zwei der hier angewendeten Verfahren insbesondere auch die Warnung, dass „eine allzu ausschließliche Bemühung um Genauigkeit das Verständnis des Wesentlichen einer Beobachtung gefährden oder vergessen machen kann“. Ich hoffe, dieser Gefahr entgangen zu sein und „das Wesentliche“, das Prinzip der drei Messverfahren, nachvollziehbar beschrieben und dazu angeregt zu haben, die Messungen selbst durchzuführen.

Trotzdem noch zwei Vorschläge zur Verbesserung der Genauigkeit:

- Bei den beiden Verfahren der Parallaxenmessung verbessern größere Brennweiten die Messung der Winkelabstände dichter benachbarter Referenzobjekte – wenn sie nicht vom Mond überstrahlt werden (z. B. Planeten).
- Für eine genaue Messung der Mondgröße ist eine möglichst formatfüllende Abbildung des Mondes von Vorteil. Gegenüber meiner Messung sollte dadurch eine doppelte Genauigkeit erreicht werden können. Allerdings ist die von Deutschland aus zu messende Größenänderung deutlich kleiner als bei einer Mondkulmination nahe beim Zenit.
- Von Europa aus sollten Messungen versucht werden, wenn der Mond in möglichst großer Höhe kulminiert, also z. B. am Vollmond im Winter oder am zunehmenden Halbmond im Frühjahr.

Der Vorteil, die Entfernung des Mondes durch die in den Abschnitten 2 und 3 beschriebenen Methoden zu bestimmen, besteht darin, dass man keinen weit entfernten Beobachter als Partner für simultane Beobachtungen benötigt. Sie stellen deshalb in vielen Fällen leichter zu realisierende Möglichkeiten dar, zu einem *eigenen Messwert* für die Mondentfernung zu kommen. Dafür aber geht ein wesentlicher Teil des Reizes verloren, der mit weltweiter, internationaler Kooperation immer verbunden ist.

Auch die allein durchzuführenden Messungen verfügen über einen gewissen Erlebnischarakter (stabiles Wetter in zwei aufeinander folgenden Nächten, Aufsuchen eines geeigneten, evtl. weit von zuhause entfernten Beobachtungsortes, ...) und erfordern eine genaue Planung (helle Referenzobjekte in der Nähe des Mondes, hohe Kulmination, ...). Beides ist aber deutlich weniger ausgeprägt als bei einer Parallaxenmessung durch weit voneinander entfernte Beobachter (siehe z. B. [1] und [2]). Die „Absprachen“ mit sich selbst sind deutlich einfacher als mit weit entfernten Beobachtern, die manchmal nicht genau zuhören bzw. lesen und Probemessungen und andere Vorbereitungen vielleicht für überflüssig halten.

Abschließend sei noch zugegeben, dass wir am 29. Mai ein viertes Verfahren zur Messung der Mondentfernung testen wollten: die simultane Messung der Mondhöhe in der Nähe seiner Kulmination. Es ist die einfachste Methode, die Martin Wagenschein in seinem Aufsatz beschreibt (Abb. 8). An einem der vorangegangenen Tage hatten wir die Mittagshöhe der Sonne in Namibia und Bochum gemessen und daraus eine Differenz der geografischen Breiten von recht genau  $74^\circ$  abgeleitet. Die eigentliche Messung scheiterte dann aber an einem Missverständnis zwischen Bochum und Namibia. Hätten wir, wie geplant, zu den Zeiten der jeweiligen Kulmination die Mondhöhe gemessen (Namibia um 4:49 UT:  $h_N = 75.4^\circ$ , Bochum um 5:27 UT:  $h_B = 29.0^\circ$ ), hätte sich, aus einer leicht verständlichen Idee und durch eine sehr einfache Rechnung, ein Parallaxenwinkel von  $p = 1.0^\circ$  ergeben:

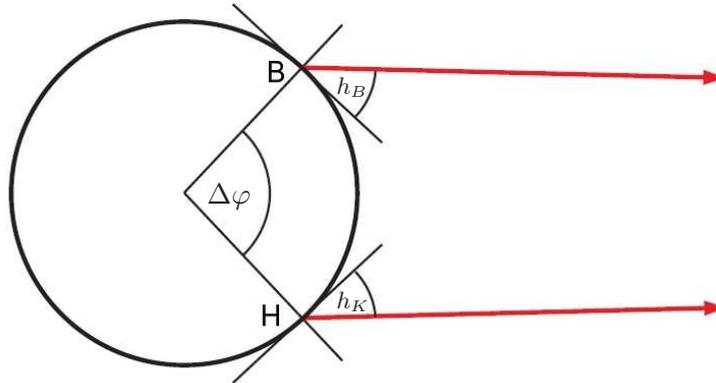


Abbildung 8: Messung der Mondparallaxe durch simultane Messung der Kulminationshöhe an zwei Orten gleicher geografischer Länge (nach Wagenschein [5])

$$p = 360^\circ - \Delta\varphi - (90^\circ + h_B) - (90^\circ + h_N) = 180^\circ - (\Delta\varphi + h_B + h_N)$$

*Ich danke den Freunden und Kollegen von der Gruppe „Astronomie & Internet im Ruhrgebiet“ für viele anregende Diskussionen über die hier vorgestellten Projekte. Insbesondere mit Alfred Knülle-Wenzel und Ronald Schüneck habe ich häufig gemeinsam, aber an verschiedenen Orten, den Mond beobachtet und fotografiert, um verschiedene Effekte sichtbar und auswertbar zu machen. Der Erfolg der hier beschriebenen Messungen beruht wesentlich auf diesen Vorversuchen.*

**Nachtrag:** Die Originalbilder, die kleinen (Windows-) Programme und die Excel-Tabellen, mit denen die Auswertungen nachvollzogen und eigene Messergebnisse ausgewertet werden können, sind im Internet verfügbar.

## Literatur

- [1] Backhaus, Udo: *Simultaneously Observing and Photographing the Moon*, (im Internet unter <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/moonproject.pdf>; Internetseite des Projektes: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/moonproject.htm>)
- [2] Backhaus, Udo: *Die Größe der Erde und die Entfernung des Mondes. Anregungen zur astronomischen Zusammenarbeit zwischen Schulen*. Praxis der Naturwissenschaften/Physik 62/8, 18 (2013) (Internetseite des Projektes: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYA2009-MoonsParallax.html>)
- [3] Federspiel, Martin: *Wie ich die Mondentfernung bestimme*, Sterne und Weltraum 47/2, 76-79 (2008)
- [4] Feitzinger, Johannes, V.: *Die Mondillusion und der gestauchte Himmel*, Sterne und Weltraum 35/11, 835 (1996)
- [5] Wagenschein, Martin: *Wie weit ist der Mond entfernt?* in: Wagenschein, M.: *Naturphänomene sehen und verstehen*, Klett: Stuttgart 1988 (im Internet unter <http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/WagenscheinWieweitistderMondvonunsentfernt.pdf>)

## A Anhang

### A.1 Messung der Mondkoordinaten

Um die Koordinaten des Mondes auf den Bildern *selbst* zu bestimmen, müssen zunächst seine Winkelabstände zu zwei Bezugsobjekten mit bekannten Koordinaten gemessen werden. Bei kurzen Brennweiten sind jedoch Winkelmessungen auf den Bildern etwas aufwändig (s. Anhang A.1.1), weil der Maßstab der Bilder nicht an allen Stellen gleich ist (A.1.1). Aus den Winkelabständen lassen sich seine Koordinaten  $(\alpha_i, \delta_i)$  berechnen (A.1.2).

#### A.1.1 Winkelmessungen auf Digitalfotos

Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass das Objektiv eine ideale Lochkameraabbildung des Sternenhimmels auf dem CCD-Chip erzeugt. Zusätzliche Abbildungsfehler des Objektivs werden vernachlässigt.

Da die Mondfotos mit kurzer Brennweite aufgenommen wurden, variiert der Maßstab auf den Fotos. Um aus den Pixelkoordinaten  $(x_i, y_i)$  zweier Sterne auf einem Bild ihren Winkelabstand am Himmel berechnen zu können, müssen zunächst die Kantenlängen  $(l_x, l_y)$  des CCD-Chips der Kamera und die Anzahl der Pixel in beiden Richtungen  $(n_x, n_y)$  bekannt sein und daraus die Pixelkoordinaten  $(x_m, y_m)$  des Bildmittelpunktes und die Kantenlänge  $M$  der (hier als quadratisch vorausgesetzten) Pixel berechnet werden.

Mit einem Näherungswert für die Brennweite  $f_0$  des Objektivs können dann zunächst die „Azimutwinkel“  $A_i$  und „Höhenwinkel“  $h_i$  der Sterne berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_i &= \arctan 2(x_i - x_m, y_i - y_m) \\ h_i &= \arctan \frac{f_0}{M\sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2}} \end{aligned}$$

Daraus können dann vorläufige Werte für die Winkelabstände abgeleitet werden:

$$w'_{ij} = \arccos(\sin h_i \sin h_j + \cos h_i \cos h_j \cos(A_i - A_j)) \quad (5)$$

Schließlich kann die Genauigkeit der Winkelmessung auf dem Bild dadurch gesteigert werden, dass der Näherungswert  $f_0$  für die Brennweite an die wahre Brennweite  $f$  angenähert wird. Dazu passt man die gemessenen Winkelabstände  $w'_{ij}$  der Sterne auf dem Foto an die wahren Werte  $w_{ij}$  an, z. B. indem man durch Variation der Brennweite die Summe der Fehlerquadrate minimiert.

#### A.1.2 Die äquatorialen Koordinaten des Mondes

Zunächst werden zwei Referenzsterne  $S_1$  und  $S_2$  ausgewählt, die voneinander den Winkelabstand  $w_{12}$  haben, und ihre Winkelabstände  $w_i$  vom Mond bestimmt. Die Sterne und der Mond bilden dann ein sphärisches Dreieck  $S_1S_2M$  mit bekannten Seitenlängen.

Die Mondposition muss einen der Schnittpunkte zwischen zwei Kreisen auf der Himmelskugel bilden. Jeder dieser Kreise ist Schnittkreis zwischen der Kugel und einer Ebene, die folgendermaßen festgelegt ist: Der Ortsvektor

$$\vec{r}_i = (\cos \alpha_i \cos \delta_i, \sin \alpha_i \cos \delta_i, \sin \delta_i)$$

des entsprechenden Sterns  $S_i$  steht senkrecht auf der Ebene, und ihr Abstand vom Ursprung ist  $\cos w_i$  (s. Abb. 9).

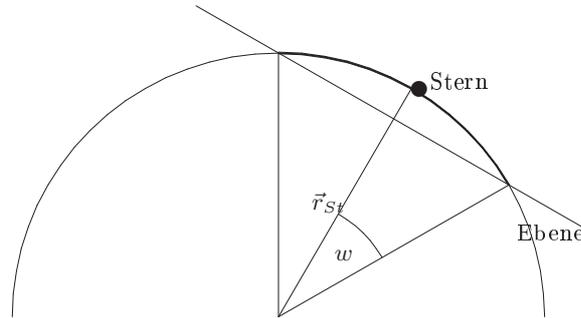


Abbildung 9: Alle Punkte auf der Einheitskugel, die denselben Winkelabstand  $w$  von einem Stern haben, bilden einen Kreis auf der Kugel. Dieser Kreis ist der Schnittkreis der Kugel mit einer Ebene.

Dann sind die Normalformen der Schnittebenen<sup>1</sup>

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r} = d_i \text{ mit } d_i = \cos w_i.$$

Gesucht ist zunächst die Parameterdarstellung der Schnittgeraden  $\vec{g}$  der beiden Ebenen:

$$\vec{g} : \vec{r} = \vec{b} + t\vec{m}$$

- Der Richtungsvektor  $\vec{m}$  ist

$$\vec{m} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (r_{1y}r_{2z} - r_{1z}r_{2y}, r_{1z}r_{2x} - r_{1x}r_{2z}, r_{1x}r_{2y} - r_{1y}r_{2x}).$$

- Der Stützvektor  $\vec{b}$  kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{b} = \frac{d_1 r_1^2 - d_2 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \vec{r}_1 + \frac{d_2 r_1^2 - d_1 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \vec{r}_2$$

Da die  $\vec{r}_i$  Einheitsvektoren sind, kann man diese Beziehung (mit  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cos w_{12}$ ) folgendermaßen vereinfachen:

$$\vec{b} = \frac{\cos w_1 - \cos w_2 \cos w_{12}}{\sin^2 w_{12}} \vec{r}_1 + \frac{\cos w_2 - \cos w_1 \cos w_{12}}{\sin^2 w_{12}} \vec{r}_2$$

Gesucht sind nun die Schnittpunkte  $\vec{s}_i$  dieser Geraden mit der Einheitskugel, d. h. zwei Parameter  $t_i$ , für die gilt:

$$\vec{s}_i = \vec{b} + t_i \vec{m} \text{ mit } s_i^2 = 1.$$

Das ist aber eine quadratische Gleichung für  $t$ :

$$\begin{aligned} (b_1 + tm_1)^2 + (b_2 + tm_2)^2 + (b_3 + tm_3)^2 &= 1 \implies \\ (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t^2 + 2(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3) t + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1) &= 0 \implies \\ \text{oder: } At^2 + Bt + C &= 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>siehe z. B. [https://de.wikipedia.org/wiki/Ebenengleichung#Hessesche\\_Normalform](https://de.wikipedia.org/wiki/Ebenengleichung#Hessesche_Normalform) und [https://de.wikipedia.org/wiki/Schnittgerade#Schnitt\\_zweier\\_Ebenen\\_in\\_Normalenform](https://de.wikipedia.org/wiki/Schnittgerade#Schnitt_zweier_Ebenen_in_Normalenform)

mit den Lösungen

$$t_1 = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C} \text{ und } t_2 = -\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C}$$

Rechnet man die kartesischen Koordinaten  $\vec{s}_i$  der Schnittpunkte in die entsprechenden sphärischen Koordinaten  $(\alpha_i, \delta_i)$  um, ist in der Regel leicht zu erkennen, welche der beiden Lösungen die richtige ist.

## A.2 Ableitung der Mondentfernung aus der Parallaxenmessung

Sind die geografischen Koordinaten  $(\varphi_i, \lambda_i)$  der beiden Beobachter bekannt, lässt sich die Mondentfernung auf folgende zwei Weisen ableiten, nachdem der lineare Abstand  $\Delta$  zwischen den Beobachtungsorten aus den entsprechenden kartesischen Koordinaten  $\vec{r}_i$  berechnet worden ist:

$$\Delta = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (6)$$

Nimmt man zunächst vereinfachend an, dass der Verbindungsvektor  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  der Beobachtungsorte senkrecht auf der Richtung zum Mond steht, lässt sich die Mondentfernung  $d$  näherungsweise nach Gleichung (1) berechnen:

$$d = \frac{\Delta}{p}$$

Bei einem anderen Winkel zwischen dem Verbindungsvektor und der Richtung  $\vec{r}_M$  zum Mond kommt es nur auf den projizierten Abstand  $\Delta_{\perp}$  an:

$$d = \frac{\Delta_{\perp}}{p} = \frac{\Delta \sin w_p}{p} \text{ mit } w_p = \arccos\left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_M\right) \quad (7)$$

Dazu müssen die Ortsvektoren der Beobachter im äquatorialen Koordinatensystem berechnet werden. Dazu mache man sich klar, dass die Deklination der Orte gleich ihrer geografischen Breite ist und dass ihre Rektaszension mit ihrer Sternzeit zum Zeitpunkt der Messung (Bochum 19:07:03, Hakos 19:43:29) übereinstimmt<sup>2</sup>.

### A.2.1 Exakte Methode

Für die exakte Berechnung ist wieder ein wenig Vektorrechnung erforderlich: Wenn  $\vec{r}_i$  die kartesischen Ortsvektoren der Beobachter sind und  $\vec{e}_i$  die Richtungen, in der sie den Mond sehen, dann muss sich der Mond irgendwo auf den Geraden befinden, die durch

$$\vec{r}_i + \nu \vec{e}_i, \quad \nu > 0$$

beschrieben werden können. Wenn die Beobachter den Mond gleichzeitig anvisieren, dann muss sich der Mond am Schnittpunkt der beiden Sichtlinien befinden. Es muss also gelten:

$$\vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1 = \vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2, \quad \lambda, \mu > 0 \quad (8)$$

<sup>2</sup>Hier evtl. auf ein Theoriewerk zum Projekt [2] hinweisen:  
<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYAParallaxe.pdf>, S. 5ff

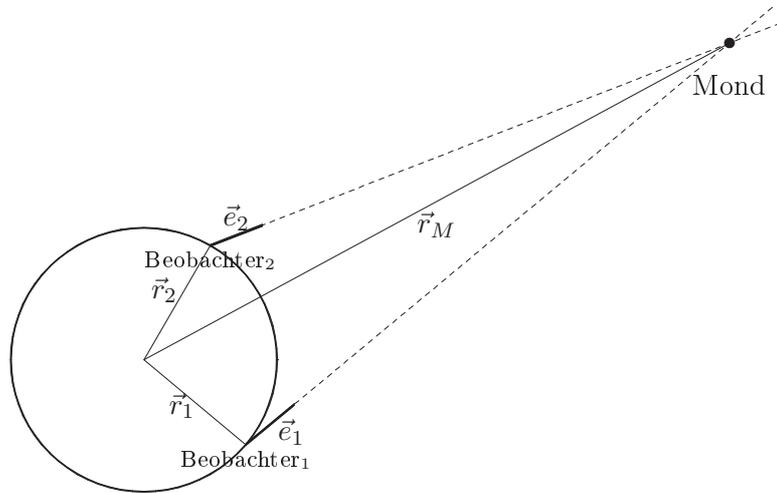


Abbildung 10: Zur Berechnung des Schnittpunktes der beiden Sichtlinien

Das sind drei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden Unbekannten  $\lambda$  und  $\mu$ ! Anders als in einer Ebene werden sich die beiden Geraden nur bei exakten Messungen schneiden. Andernfalls verfehlen sie einander („windschiefe Geraden“). Wegen immer auftretender Messfehler wird also das Gleichungssystem (8) niemals lösbar sein.

Aus diesem Grunde sind wir gezwungen, statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden zu berechnen. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten  $\vec{P}_1 = \vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1$  und  $\vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2$  auf den Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

$$\begin{aligned} (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\ (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Das ist ein System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten  $\lambda$  und  $\mu$ . Eine einfache Umformung führt auf die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \\ \lambda - \mu &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \end{aligned}$$

aus denen die gesuchten Parameter leicht zu berechnen sind:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} ((\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)), \\ \mu &= \frac{1}{2} ((\lambda + \mu) - (\lambda - \mu)) \end{aligned}$$

Die Entfernung des Mondes ergibt sich dann schließlich zu

$$r_M \approx |\vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1| \approx |\vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2| \quad (9)$$

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Minimalabstand  $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$  der beiden Sichtlinien nehmen.

### A.3 Interpolation der Mondbewegung

Will man, anders als bei der Ableitung von Gleichung (2), den nichtlinearen Charakter der sphärischen Koordinaten berücksichtigen, ist die Interpolation zwischen den im Abstand von 24h50min gemessenen Mondpositionen etwas schwieriger, weil dazu Kenntnisse aus der Vektorrechnung erforderlich sind:

1. Man nimmt an, dass der Mond *in seiner Bahnebene* eine gleichförmige Kreisbewegung vollführt. Den (Einheits-) Normalenvektor  $\vec{n}$  dieser Ebene erhält man aus den rechtwinkligen Koordinaten  $\vec{r}_i$  der beiden gemessenen Mondpositionen:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3|}$$

Den zweiten Einheitsvektor  $\vec{e}_\perp$ , der  $\vec{e}_1 = \vec{r}_1$  zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Bahnebene ergänzt, erhält man aus

$$\vec{e}_\perp = \vec{n} \times \vec{r}_1.$$

2. Der während der Zeitspanne  $\Delta t = t_3 - t_1$  insgesamt vom Mond überstrichene Winkel  $\Delta\varphi$  ergibt sich aus

$$\Delta\varphi = \arccos(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3).$$

Nimmt man nun an, dass der Mond die Erde während des betrachteten Mondtages gleichförmig umläuft, dann hat er zu einem beliebigen Zwischenzeitpunkt  $t_2$  den Winkel

$$\varphi(t_2) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}(t_2 - t_1) \quad (10)$$

überstrichen. Sein Ortsvektor  $\vec{r}'(t_2)$  ist demnach

$$\vec{r}'(t_2) = \cos \varphi(t_2) \vec{e}_1 + \sin \varphi(t_2) \vec{e}_\perp. \quad (11)$$

Daraus lassen sich die parallaxenfreien Koordinaten des Mondes ( $\alpha'(t_2), \delta'(t_2)$ ) zum Zeitpunkt  $t_2$  berechnen. Sie stellen die Mondposition dar, die ein *virtueller Beobachter* messen würde, der sich seit der Zeit  $t_1$  auf der Erde so bewegt hat, dass sich seine Stellung *im Raum* relativ zu Erdmittelpunkt und Mond nicht verändert hat. Im rotierenden Bezugssystem, in dem der Mond ruht und sich die Erde in 24h50min einmal dreht, ändert dieser Beobachter seine Position nicht. Anders als in Gleichung (3) vereinfachend angenommen wurde, entfernt er sich vom Beobachtungsort mit der synodischen Winkelgeschwindigkeit  $\frac{360^\circ}{24h50min} \approx 14.5 \frac{^\circ}{h}$ .

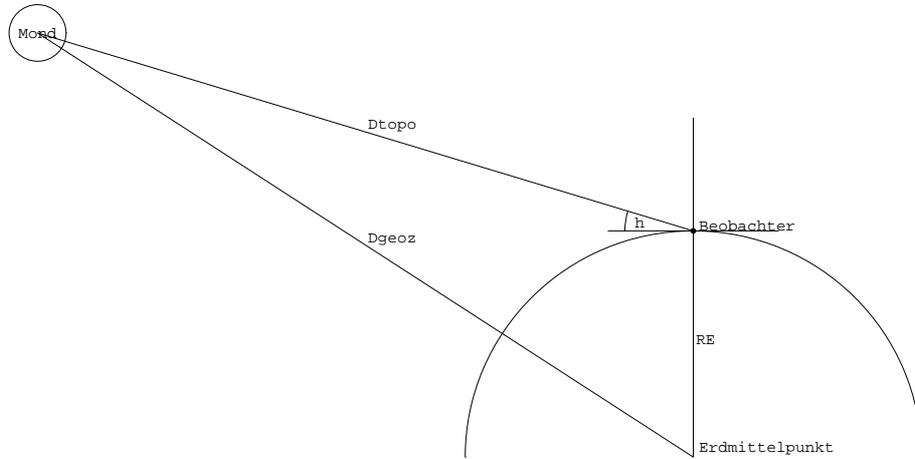


Abbildung 11: Auf das Dreieck Mond-Erdmittelpunkt-Beobachter kann der Kosinussatz angewendet werden.

#### A.4 Der Zusammenhang zwischen Winkeldurchmesser und Entfernung

Der allgemeine Zusammenhang zwischen der topozentrischen Entfernung des Mondes  $D_{topo}$  und der Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt  $D_{geoz}$  ergibt sich durch Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck Erdmittelpunkt-Beobachter-Mond (s. Abb. 11):

$$D_{geoz}^2 = D_{topo}^2 + R_E^2 - 2D_{topo}R_E \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right). \quad (12)$$

Dabei ist  $h$  die beobachtete Höhe des Mondes über dem Horizont.

Die Gleichung enthält zwei unbekannte Entfernungen. Misst man jedoch in einer Nacht zweimal im Abstand mehrerer Stunden, dann kann der geozentrische Abstand des Mondes während des Messintervalls als konstant angenommen werden. Setzt man deshalb die rechten Seiten der beiden Gleichungen der Gestalt (12) einander gleich, erhält man wegen  $D_{topo1} = \alpha D_{topo2}$

$$\begin{aligned} D_{topo2}^2 + 2D_{topo2}R_E \sin h_2 &= \alpha^2 D_{topo2}^2 + 2\alpha D_{topo2}R_E \sin h_1 \implies \\ (\alpha^2 - 1)D_{topo2}^2 &= 2(\sin h_2 - \alpha \sin h_1)R_E D_{topo2} \implies \\ D_{topo2} &= 2 \frac{\sin h_2 - \alpha \sin h_1}{\alpha^2 - 1} R_E \end{aligned} \quad (13)$$

$D_{topo2}$ , und mit Hilfe von Gleichung (12), auch  $D_{geoz}$  lassen sich also berechnen, wenn das Verhältnis  $\alpha$  der Winkeln  $h_1$  und  $h_2$  gemessen worden sind.