

Die Änderung der Größe des Mondes zwischen Aufgang und Kulmination und die Entfernung des Mondes

Udo Backhaus

7. Juli 2016

Die scheinbare Größe des Mondes ändert sich im Laufe einer Nacht. Lässt sich dieser Effekt fotografieren bzw. messen, und kann man aus der Größenänderung vielleicht sogar die Entfernung des Mondes ableiten?

1 Einleitung

Der aufgehende Vollmond erscheint uns deutlich größer als der hoch am Himmel stehende Mond. Dabei muss es sich um eine Täuschung unserer Wahrnehmung handeln – die sogenannte *Mondillusion*. (ROSS & PLUG 2002 [3]) Denn man kann sich geometrisch leicht überlegen, dass objektiv das Gegenteil richtig sein muss: Bei seinem Aufgang ist der Mond fast um einen Erdradius weiter vom Beobachter entfernt als bei seiner Kulmination, sein Winkeldurchmesser muss also dementsprechend kleiner sein – bei einer Mondentfernung von etwa 60 Erdradien immerhin um etwa 1.6%.

Der Nachweis und die Auswertung dieses Effektes haben mich seit vielen Jahren immer mal wieder beschäftigt. Systematisch bin ich ihm wohl zum ersten Mal nachgegangen, als einer meiner Studenten 1986 im Rahmen seiner Examensarbeit häufig den Mond durch ein langbrennweitiges Teleskop fotografierte, um die Änderung seiner Phasengestalt möglichst genau zu dokumentieren. Ein weiteres Mal zeigte sich der Effekt zufällig beim Fotografieren der Mondfinsternis 2015. Eine recht genaue Messung gelang jedoch erst bei einer Reise nach Namibia im Jahr 2016.

Hier soll über diese Beobachtungen und Messungen berichtet und damit zu ihrer Wiederholung und eventuell zu ihrer Verbesserung angeregt werden.

2 Der Zusammenhang zwischen Winkeldurchmesser und Entfernung

Die Änderung des Winkeldurchmessers des Mondes ist umso größer, je höher der Mond im Laufe der Nacht über den Himmel zieht. Meine Reise nach Namibia im Mai 2016 bot eine hervorragende Gelegenheit, den Effekt zu dokumentieren und zu messen. Am ersten Abend meines Aufenthaltes auf der Hakos-Farm war Vollmond gerade einen Tag

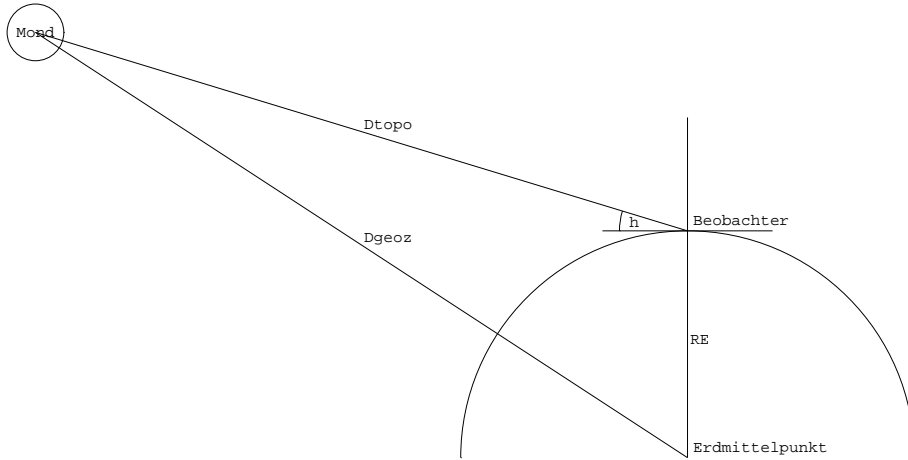


Abbildung 1: Auf das Dreieck Mond-Erdmittelpunkt-Beobachter kann der Kosinussatz angewendet werden.

vorüber. Bei Vollmond lässt sich die Mondgröße am sichersten messen, und einen Monat vor Winteranfang (auf der Südhalbkugel) geht der Vollmond fast durch den Zenit.

Der Effekt ist am größten, wenn die Mondgröße bei Mondaufgang (oder bei Monduntergang) und beim Durchgang des Mondes durch den Zenit gemessen wird. Dann unterscheiden sich die *topozentrischen* Mondentfernungen D_{topoA} und D_{topoZ} , das heißt die Entfernungen zwischen Beobachter und Mond, näherungsweise um einen Erdradius R_E . Genauer gilt in diesem Grenzfall für das Verhältnis $\alpha = \frac{r_{MZ}}{r_{MA}}$ der gemessenen Winkelradien¹

$$\alpha^2 = \frac{D_{topoA}^2}{D_{topoZ}^2} = \frac{D_{geoz}^2 - R_E^2}{(D_{geoz} - R_E)^2} = \frac{D_{geoz} + R_E}{D_{geoz} - R_E}.$$

Dabei ist D_{geoz} die geozentrische Entfernung des Mondes. Daraus ergibt sich

$$\frac{D_{geoz}}{R_E} = \frac{2}{\alpha^2 - 1} + 1 \quad (1)$$

Der allgemeine Zusammenhang zwischen der topozentrischen Entfernung des Mondes D_{topo} und der Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt D_{geoz} ergibt sich durch Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck Erdmittelpunkt-Beobachter-Mond (s. Abb. 1):

$$D_{geoz}^2 = D_{topo}^2 + R_E^2 - 2D_{topo}R_E \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right). \quad (2)$$

Dabei ist h die beobachtete Höhe des Mondes über dem Horizont.

Die Gleichung enthält zwei unbekannte Entfernungen. Misst man jedoch in einer Nacht zweimal im Abstand mehrerer Stunden, dann kann der geozentrische Abstand des Mondes während des Messintervalls als konstant angenommen werden. Setzt man deshalb die

¹s. Abbildung 1. Zur Zeit des Aufganges ist $h = 0^\circ$, und das Dreieck Erdmittelpunkt - Beobachter - Mond ist rechtwinklig.

rechten Seiten der beiden Gleichungen der Gestalt (2) einander gleich, erhält man wegen $D_{topo_1} = \alpha D_{topo_2}^2$

$$\begin{aligned} D_{topo_2}^2 + 2D_{topo_2}R_E \sin h_2 &= \alpha^2 D_{topo_2}^2 + 2\alpha D_{topo_2}R_E \sin h_1 \implies \\ (\alpha^2 - 1)D_{topo_2}^2 &= 2(\sin h_2 - \alpha \sin h_1)R_E D_{topo_2} \implies \\ D_{topo_2} &= 2 \frac{\sin h_2 - \alpha \sin h_1}{\alpha^2 - 1} R_E \end{aligned} \quad (3)$$

D_{topo_2} lässt sich also berechnen, wenn das Verhältnis α der Winkelradien und die beiden Höhenwinkel h_1 und h_2 gemessen worden sind.

3 Erste Versuche

3.1 Examensarbeit A. Schmidt (1986)

Den ersten Versuch, die Größenänderung des Mondes im Verlauf einer Nacht nachzuweisen unternahm A. Schmidt im Rahmen seiner Examensarbeit (SCHMIDT 1986 [1]), in der er den Mond mit einem Teleskop der Brennweite 1300mm (noch analog) fotografierte, um zu klären, ob aus der Phasengestalt des Mondes der genaue Zeitpunkt des (lokalen) Halbmondes ableitbar ist (BACKHAUS & SCHMIDT 2003 [2]). Die Größenänderung des Mondes war nicht Gegenstand der Arbeit, ergab sich aber gewissermaßen nebenbei.

Fotografiert wurde der zunehmende Halbmond³ in der Nähe seiner Kulmination und kurz vor seinem Untergang. Anhand unterschiedlicher Digitalisierungen der Bilder wurde eine Änderung des Winkelradius um 1.2% - 1.4% festgestellt. Die Größenänderung konnte damit eindeutig nachgewiesen und aus dem Messergebnis eine obere Grenze für die Mondentfernung abgeleitet werden:

Der Mond ist nicht weiter als 81 Erdradien von der Erde entfernt.

Für eine genauere Abschätzung müssten die Höhen des Mondes zu den Zeitpunkten der Aufnahmen bekannt sein. Sie wurden leider nicht gemessen. Sie können auch nicht nachträglich berechnet werden, weil sich Datum und Uhrzeiten nicht mehr rekonstruieren lassen.

3.2 Mondfinsternis 2015

Am frühen Morgen des 28. September 2015 beobachtete und fotografierte ich bei der ersten totalen Mondfinsternis seit vielen Jahren ab 3:00 Uhr MESZ den Eintritt des Mondes in den Kernschatten der Erde. Testaufnahmen zur Fokussierung hatte ich am vorangehenden Abend kurz nach Mondaufgang gegen 18:30 Uhr MESZ gemacht.

Bei der späteren Aufarbeitung der Bilder bemerkte ich zufällig, dass der Mond beim Eintritt in den Kernschatten etwas größer erschien als nach Mondaufgang. Das erinnerte

²Gleichung (3) geht in dem oben beschriebenen Idealfall in Gleichung (1) über.

³Diese Mondphase war für die Arbeit besonders wichtig, weil es um den Nachvollzug der Aristarch'schen Idee zur Messung der Sonnenentfernung ging.



Abbildung 2: Der Halbmond in der Nähe seiner Kulmination (links) und kurz vor Untergang (rechts). Im rechten Bild wurde zum Vergleich die Größe des hochstehenden Mondes durch einen roten Kreis angedeutet.



Abbildung 3: Noch tief stehender Vollmond (links) und hoch stehender Mond kurz vor Eintritt in den Kernschatten (rechts). Der Unterschied in den Mondradien beträgt nur 5 Pixel.

mich plötzlich an die Änderung des Winkeldurchmessers durch die Änderung des Abstandes zwischen Beobachter und Mond, und ich versuchte, den Effekt zu messen und auszuwerten. Als Radien des Mondes auf den Bildern von 18:34 und 3:06 Uhr MESZ fand ich $r_{M_1} = 915\text{Pixel}$ und $r_{M_2} = 920\text{Pixel}$. Weil ich während der Aufnahmen nicht an diesen Effekt gedacht hatte, hatte ich die Mondhöhen nicht gemessen, obwohl ein Pendelquadrant griffbereit war. Mit den genauen Aufnahmezeitpunkten ließen sich die Mondhöhen aber immerhin nachträglich berechnen: $h_1 = 5^\circ$, $h_2 = 33^\circ$.

Einsetzen dieser Werte in Gleichung (3) ergibt mit

$$D_{\text{geoz}} = 84R_E \quad (\text{korrekter Wert: } 56R_E)$$

einen wenig befriedigenden Wert für die Mondentfernung. Ein wesentlicher Grund dafür muss der geringe Unterschied der Mondhöhen – und damit der Winkelradien – sein.



Abbildung 4: Der gerade aufgegangene Mond am 22. Mai um 18:32 UT (links) und der hoch stehende Mond um 23:09 UT (rechts). Der Größenunterschied ist in dieser Darstellung kaum festzustellen.

4 Die Messung in Namibia 2016

In meiner ersten Nacht in Namibia, 22./23. Mai 2016, kulminierte der Vollmond nahe beim Zenit – eine ideale Gelegenheit für den Versuch, die Größenänderung des Mondes im Laufe der Nacht deutlich sichtbar zu machen und daraus einen besseren Wert für die Mondentfernung abzuleiten. Ich fotografierte deshalb den Mond kurz nach Aufgang um 18:32 UT und kurz vor seinem Höchststand um 23:09 UT. Ich benutzte dabei eine feststehende Kamera mit einem Spektiv (effektive Brennweite $f = 800\text{mm}$). Die mit meinem Pendelquadranten gemessenen Höhen über dem Horizont betrugen dabei $h_1 = 8^\circ$ und $h_2 = 80^\circ$.

Bei der Messung der Pixelradien des Mondes auf den Digitalbildern⁴ bemerkt man, dass der gerade aufgegangene Mond durch die atmosphärische Lichtbrechung abgeplattet ist. Sein Radius muss deshalb parallel zur Horizontlinie gemessen werden. Die Kamera war deshalb so justiert, dass die untere Bildkante horizontal verlief.

Es ergaben sich die Mondradien zu $r_{M_1} = 813Px$ und $r_{M_2} = 824Px$. Mit dem daraus folgenden Radienverhältnis $\alpha = \frac{824}{813}$ ergibt sich für 23:09 UT der topozentrische Abstand des Mondes zu $D_{topo_2} = 61.9R_E$. Der geozentrische Abstand ergibt sich daraus durch Einsetzen in Gleichung (2) zu

$$D_{geoz} = \sqrt{D_{topo_2}^2 - R_E^2 + 2D_{topo_2}R_E \sin h_2} = 62.9R_E \quad (4)$$

Die korrekte Mondentfernung betrug zu dem Zeitpunkt $62.7R_E$.

Dieses Ergebnis ist nahezu perfekt. Allerdings habe ich dabei auch Glück gehabt. Der Wert für die Mondentfernung hängt sehr empfindlich von den gemessenen Mondradien

⁴z. B. mit dem beim Merkurtransit 2016 verwendeten Programm `evaltransitpicts.exe`

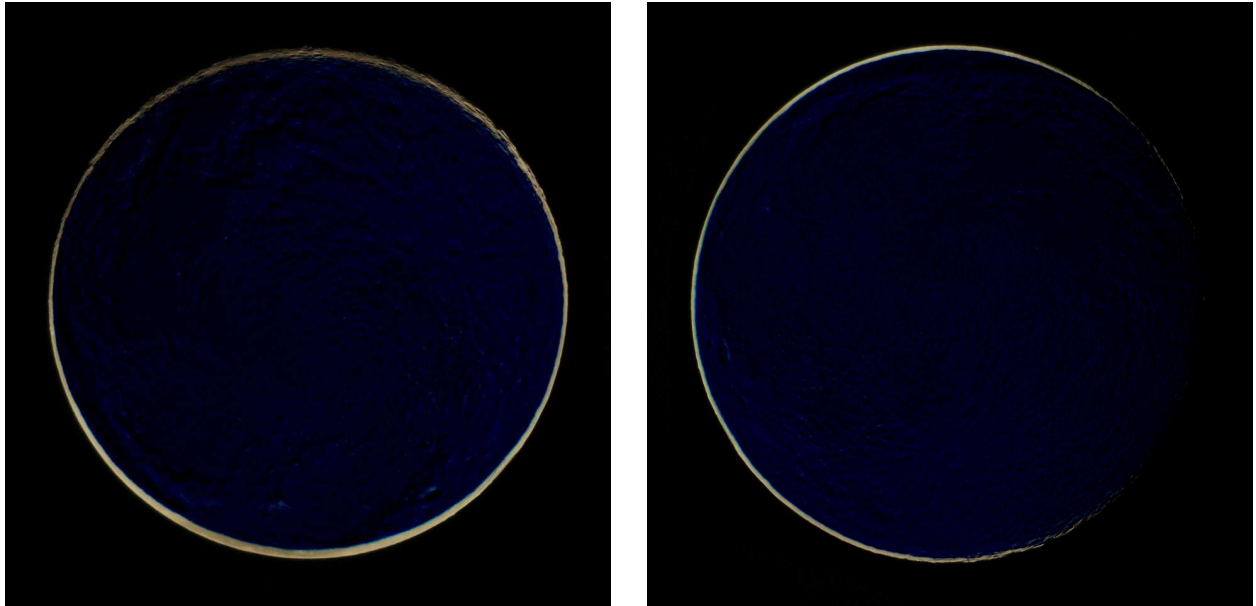


Abbildung 5: Überlagerung der Bilder aus Abb. 4. Der helle Rand gehört zu dem hoch stehenden Mond. Im linken Bild ist die Abplattung des aufgehenden Mondes durch Streckung korrigiert.

ab, und diese können höchstens auf ein Pixel genau gemessen werden. Schon bei einem Verhältnis von $\alpha = \frac{825}{813}$ hätte sich eine Entfernung von $57.7R_E$ ergeben. Es scheint mir deshalb ehrlich zu sein, diese Messunsicherheit zu berücksichtigen und das Ergebnis der Messung folgendermaßen anzugeben:

Die geozentrische Entfernung des Mondes betrug am 22. Mai 2016

$$D_{geoz} = 63R_E \pm 10\%.$$

5 Visualisierung der scheinbaren Größenänderung des Mondes

Die Größenänderung des Mondes kann visualisiert werden, indem man die beiden Vergleichsbilder „übereinanderlegt“⁵. Besonders eindrucksvoll wird das Ergebnis, wenn man das zuerst aufgenommene Bild so vertikal dehnt, dass der Mond trotz der Lichtbrechung nahezu kreisförmig erscheint, und beide Bilder so dreht, dass die Ost-West-Richtung parallel zur unteren Bildkante verläuft⁶. Dann kann man bei Differenzbildung die Oberflächenstrukturen des Mondes noch wahrnehmen und den größeren Winkeldurchmesser des hoch stehenden Mondes am hellen Rand erkennen (Abb. 5, rechts).

Auf diese Weise kann die Größenänderung sogar bei den ersten Messversuchen veranschaulicht werden (Abb. 6).

⁵z. B. mit ImageJ

⁶Dazu wurden jeweils zwei Aufnahmen kurz nacheinander gemacht.

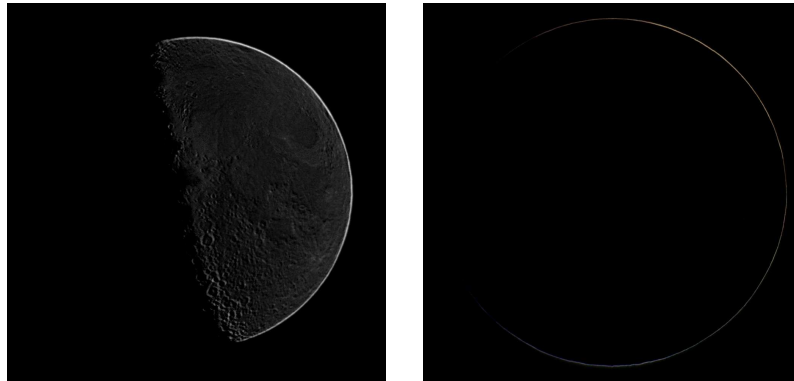


Abbildung 6: Visualisierung des Effektes anhand der Aufnahmen aus den Jahren 1986 und 2015. Die Bilder wurden nicht in die Ost-West-Richtung gedreht. Eins der jeweils überlagerten Bilder aber wurde so gedreht, dass die Oberflächenstrukturen des Mondes auf beiden Bildern übereinstimmten.

Literatur

- [1] A. Schmidt, *Einsatz eines Linsenfernrohres bei Messungen am Mond*, Staatsexamensarbeit, Koblenz 1986
- [2] U. Backhus, A. Schmidt, *Kann die Sonnenentfernung durch Phasenmessungen am Mond bestimmt werden?*, Vorträge der DPG 2003 in Augsburg
- [3] Ross, H.; Plug, C.: *The Mystery of the Moon Illusion*, Oxford: University Press 2002