

Virialsatz und Mondentfernung

Die Entfernung des Mondes in 30 Minuten selbst gemessen

Alfred Knülle-Wenzel, Udo Backhaus

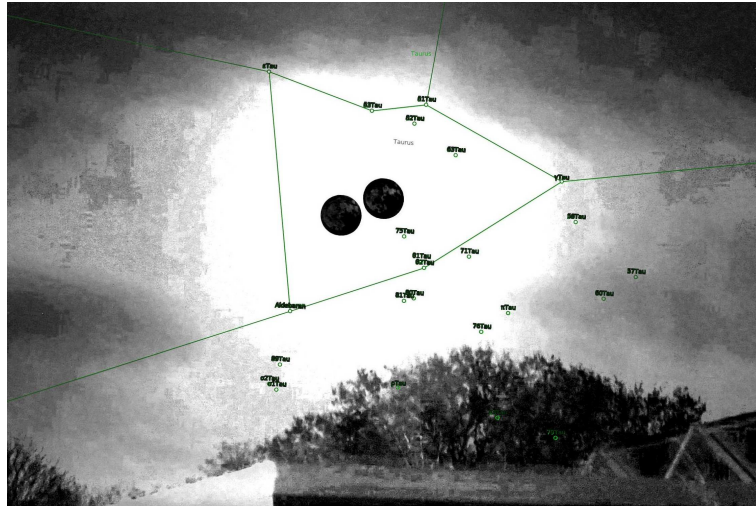


Abbildung 1: Beobachtete Bewegung des Mondes innerhalb von 90 min

1 Einleitung

Unsere Gruppe für Astronomie begeisterter Lehrer, „Astronomie & Internet im Ruhrgebiet“ diskutiert schon lange über die verschiedenen Möglichkeiten, die Entfernung des Mondes von der Erde *selbst* zu messen. Die bekanntesten Methoden dazu sind die Parallaxenmessung am Mond von verschiedenen Orten der Erde aus und die Messung des Verhältnisses der Radien von Mond und Erdschatten bei einer Mondfinsternis. Das erste dieser Verfahren ist schwierig durchzuführen, weil man dazu einen weit entfernten Partner braucht, der *gleichzeitig* mit einem selbst den Mond beobachtet und fotografiert. Für die zweite Methode muss man lange auf eine Gelegenheit zur Messung warten, weil Mondfinsternisse selten sind.

Inzwischen haben wir die Entfernung des Mondes mit den erwähnten Verfahren mit befriedigenden Ergebnissen gemessen. Wir haben aber auch zwei weitere Methoden erfolgreich getestet, die ein Beobachter *allein* durchführen kann (Backhaus 2019 [1]):

- die Messung der täglichen Parallaxe des Mondes und
- die Messung der Größenänderung des Mondes zwischen Aufgang und Kulmination.

Während der Beschäftigung mit diesen Verfahren hatte einer von uns (AKW) die Idee, den Virialsatz der Mechanik für die Entfernungsbestimmung auszunutzen. Dann müsste man nur die Winkelgeschwindigkeit des Mondes am Himmel messen – und das sollte für einen einzelnen Beobachter innerhalb von etwa einer Stunde möglich sein.

In diesem Papier soll über den erfolgreichen Test dieses Verfahrens berichtet werden.

2 Ein wenig Theorie

Nimmt man vereinfachend an, dass sich der Mond auf einer geozentrischen Kreisbahn um die Erde bewegt, dann muss gelten:

$$\begin{aligned} F_z = m_M \omega^2 r_M &= G \frac{m_M m_E}{r_M^2} \\ \implies \omega^2 r_M^3 &= GM_E = g R_E^2 \\ \implies r_M &= \sqrt[3]{\frac{g R_E^2}{\omega^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Ausgangsgleichung kann man auch in folgender Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_M v^2 &= \frac{G m_M M_E}{r_M} \\ \implies E_{kin} &= -\frac{1}{2} E_{pot} \end{aligned} \quad (2)$$

In dieser Form stellt sie den sogenannten Virialsatz dar. Er gilt nicht nur für die Kreisbahn, sondern allgemein für Bewegungen im Gravitationsfeld.¹

Setzt man den Erdradius R_E und die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche g als bekannt voraus, erlaubt Gleichung (1) den geozentrischen Mondabstand zu berechnen, wenn man die Winkelgeschwindigkeit ω_M des Mondes am Himmel gemessen hat. Dabei muss man allerdings berücksichtigen, dass sich der Beobachter aufgrund der Erdrotation auch bewegt. Die beobachtete Winkelgeschwindigkeit des Mondes entsteht deshalb im Allgemeinen durch Überlagerung der Bewegungen von Mond und Beobachter. Deshalb muss darauf geachtet werden, dass sich der Beobachter bei der Messung möglichst genau auf den Mond zubewegt oder sich von ihm fortbewegt. Das ist näherungsweise der Fall, wenn der Mond nach seinem Aufgang im Osten steht oder vor seinem Untergang im Westen.

3 Die Aufnahmen

Für den 23. November 2018 verabredeten wir erste Probeaufnahmen für die Messung in Lippstadt (Ronald Schünecke), Hannover (UB) und Bochum (AKW). Wegen eines aufziehenden Tiefs mit sich schnell verdichtenden Wolken gelangen nur die Aufnahmen in Bochum. Dort stand der Mond um 19:50 Uhr MEZ genau im Osten. Es entstanden Fotos um 17:50, 18:21, 19:20 und 19:51 Uhr. Aufnahmen nach dem Ostdurchgang waren auch dort wegen zunehmender Bewölkung nicht möglich. Um 17:50 Uhr stand der Mond noch sehr tief und war durch die atmosphärische Refraktion deutlich verzerrt, sodass auf den Bildern eine genaue Positionsbestimmung unmöglich war. Wir konzentrieren uns deshalb hier auf die Bilder ab 18:21 Uhr.

Um auf den Fotos sowohl Sterne erkennen als auch den Mond scharf abbilden zu können, wird der Mond jeweils zweimal unmittelbar nacheinander fotografiert – einmal

¹Die bei der Ableitung benutzte Beziehung $v = r\omega$ gilt streng allerdings nur für die Kreisbahn. Eine eventuell vorhandene Radialgeschwindigkeit wird dabei vernachlässigt.



Abbildung 2: Die Originalbilder von 18:21 Uhr (links) und 19:51 Uhr

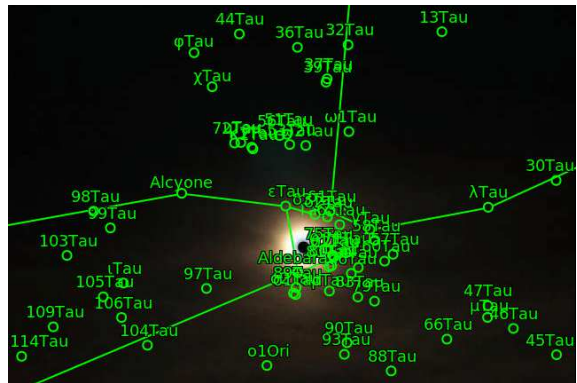


Abbildung 3: Auf den Fotos der Abbildung 2 identifiziert `astrometry.net` viele Hyadensterne.

mit langer Belichtungszeit (2 s) und einmal mit kurzer (1/200 s). Auf dem Differenzbild erkennt man dann den scharf abgebildeten Mond als Negativ im „Hof“ des überbelichteten Mondes (Abb. 2).

Auf diesen Bildern konnten wir – ebenso wie mit unseren Augen am Himmel – wegen der aufziehenden Bewölkung kaum Fixsterne entdecken, obwohl wir wussten, dass der Mond zur Zeit der Aufnahmen mitten in den Hyaden stand. Ganz anders das Programm von `astrometry.net`, dem wir die Fotos (ohne Angabe der Ausrichtung der Kamera und der Größe des Gesichtsfeldes) übermittelten. Es identifizierte nach nur kurzer „Überlegung“ eine Unzahl ihm bekannter Sterne (Abb. 3) und konnte damit die WCS-Koordinaten² für die Fotos berechnen.

4 Auswertung

Von der Ergebnisseite kann man dann jeweils ein Bild `new-image.fits` herunterladen, das die WCS-Koordinaten enthält, aber sonst mit dem Originalbild übereinstimmt³. Lädt man

²WCS: **W**orld **C**oordinate **S**ystem

³Das zurückgelieferte fits-Bild besteht aus einem Stapel dreier Grauwert-Bilder, die den drei Farbkälen R, G und B entsprechen und ggf. wieder zu einem Farbbild kombiniert werden können.

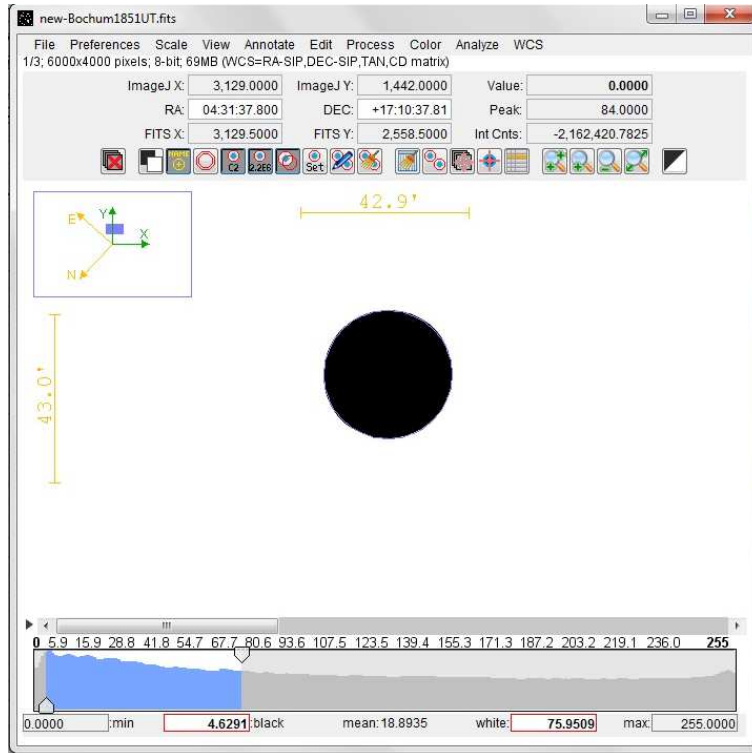


Abbildung 4: Bei der Messung der Mondposition mit **AstroImageJ** wird der Aperturkreis genau über das Negativ des scharf abgebildeten Mondes gelegt. Die Koordinaten (RA,DEC) des Kreismittelpunktes stimmen dann mit denen des Mondes überein.

diese Ergebnisbilder mit **AstroImageJ**, dann kann man sich die äquatorialen Koordinaten des Mondes mit dem „Aperture“-Tool anzeigen lassen, am besten indem man den inneren Aperturradius auf die Größe des Mondes einstellt (Abb. 4).

Auf den Fotos von 17:21 Uhr und 18:51 Uhr haben wir so die folgenden Mondkoordinaten gemessen:

17:21	4h28m3.23s	16°55'8.61''
18:51	4h31m37.8s	16°10'37.8''

Aus diesen berechneten wir, da sich der Mond in der Zwischenzeit nur um einen kleinen Winkel weiterbewegt hat (Abb. 1), den überstrichenen Winkel η nach folgender vereinfachten Formel:

$$\eta = \sqrt{(\Delta\alpha \cos \delta)^2 + (\Delta\delta)^2} = 0.893^\circ$$

Zusammen mit der zwischen den Aufnahmen verstrichenen Zeit von $\Delta t = 90 \text{ min} = 5400 \text{ s}$ ergibt sich daraus die Winkelgeschwindigkeit des Mondes zu

$$\omega = \frac{\eta}{\Delta t} = 2.887 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{s}} = 0.595^\circ/\text{h}.$$

Mit Gleichung (1) erhalten wir daraus eine Mondentfernung von

$$r_M = 363000 \text{ km},$$

die weniger als 2% unter der von **Guide** berechneten Entfernung liegt.

Bei der Kombination der letzten beiden Aufnahmen (8:20 und 18:51 Uhr) ergibt sich ein ebenso guter Wert für die Entfernung⁴.

5 Fazit

Auch wenn noch weitere Messungen zur Überprüfung erforderlich sind, ist doch bereits jetzt offensichtlich, dass das von Alfred vorgeschlagene Verfahren nicht nur funktioniert, sondern sogar zu sehr guten Messwerten führt. Allerdings ist es unerlässlich, einen geeigneten Zeitpunkt für die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit zu wählen. So hätte die Messung der Winkelgeschwindigkeit gegen Mitternacht in derselben Nacht zu einer Abweichung von mehr als 20% vom korrekten Wert der Mondentfernung geführt⁵.

Die Messungen müssen durchgeführt werden, wenn der Mond nach seinem Aufgang möglichst genau im Osten steht, sodass sich der Beobachter durch die Erdrotation fast genau auf ihn zubewegt (und damit senkrecht zur Richtung der Mondbewegung), und bereits hoch genug am Himmel steht, dass er nicht mehr durch atmosphärische Refraktion verformt ist und den Dunst am Horizont bereits unter sich gelassen hat. Entsprechendes gilt für seinen Untergang im Westen. Die Bedingungen können erfüllt werden, wenn der Mond einen großen Tagbogen durchläuft, wie z. B. der (fast) volle Mond in der Nähe der Wintersonnenwende, der zunehmende Halbmond im Frühjahr der abnehmende Halbmond im Herbst.

Damit haben wir jetzt insgesamt fünf Methoden zur Messung der Mondentfernung erfolgreich durchgeführt:

1. Parallaxenmessung von zwei weit voneinander entfernten Orten aus (weltweit 2000⁶, weltweit⁷, Deutschland/Namibia 2016 (Backhaus 2019 [1])).
2. Parallaxenmessung bei Mondfinsternis von zwei Orten innerhalb von Deutschland aus (Bayreuth/Bielefeld, 27. Juli 2018⁸)
3. Messung der täglichen Parallaxe (z. B. Kleinglattbach, Dezember 2015⁹, Lippstadt, Januar 2016¹⁰, Namibia, Mai 2016 (Backhaus 2019 [1])),

⁴Die Messwerte der Aufnahmen vom 23. 11. 2018 befinden sich in der Excel-Tabelle `MondentfernungVirialsatz` (<http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallax/MondentfernungVirialsatz.xls>). Mit der Tabelle können auch weitere eigene Messwerte leicht ausgewertet werden.

⁵Zu dieser Zeit stand der Mond nahe seiner Kulmination, und der Beobachter bewegte sich aufgrund der Erdrotation in dieselbe Richtung wie der Mond. Durch die Überlagerung dieser beiden Bewegungen wäre eine zu kleine Winkelgeschwindigkeit gemessen worden – und damit eine zu große Mondentfernung.

⁶<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/moonproject.htm>

⁷<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYA2009-MoonsParallax.html>

⁸<http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallaxmonet.html>

⁹<http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallaxmonet.html>

¹⁰<http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallaxmonet.html>

4. Vergleich der Größen von Mond und Erdschatten bei Mondfinsternis (z. B. 28. September 2015¹¹, siehe auch die Aufgabe des Astronomischen Schlechtwetter-Praktikums¹²,
5. Messung der Änderung der scheinbaren Mondgröße zwischen Aufgang und Kulmination¹³ (Namibia, Mai 2016)
6. Messung der Winkelgeschwindigkeit und Anwendung des Virialsatzes (November 2018)

Zwei weitere Methoden haben wir leider noch nicht selbst durchgeführt:

7. Messung der Parallaxe bei Sonnenfinsternis und
8. Gleichzeitige Messung der Kulminationshöhe von weit voneinander entfernten Orten (fast) gleicher geografischer Länge (Wagenschein 1988). Leider haben wir die Gelegenheit dazu im Mai 2016 verpasst. Aber vielleicht schaffen wir es 2019?

Jede dieser Methoden hat ihre spezifischen Vor- und Nachteile. Am einfachsten zu verstehen ist sicher die von Wagenschein vorgeschlagene Methode 8. Am genauesten sind vermutlich die direkten Parallaxenmessungen 1, 2 und 7 bei möglichst großer Basislänge. Sie erfordern allerdings den Kontakt zu einem entfernten Partner und sehr genaue Absprachen. Darin liegen sowohl die praktischen Schwierigkeiten, aber auch der besondere Reiz einer internationalen Zusammenarbeit.

Die Messungen bei Mond- oder Sonnenfinsternis 2, 4 und 7 können leider nur sehr selten durchgeführt werden.

Die auf Aristarch und Hipparch zurückgehende Methode 4 und die Messung der Größenänderung des Mondes 5 führen nicht zu sehr guten Ergebnissen, sind aber wegen des wohl überraschenden Messprinzips, das aber auf leicht verständlichen Ideen beruht, interessant.

An der Methode 3 ist wohl am überraschendsten, dass es überhaupt möglich ist, *allein* die Mondparallaxe zu messen¹⁴. Das Messprinzip ist allerdings nicht leicht zu verstehen.

Die genaue Auswertung ist bei allen Parallaxenmessungen recht aufwändig. Sie kann aber bei geringerem Anspruch an die Genauigkeit deutlich vereinfacht werden.

Das am einfachsten und allein durchzuführende, vielleicht auch eins der genauesten, Verfahren scheint die Verwendung des Virialsatzes (Nr. 6) zu sein. Anders als die anderen rein geometrischen Verfahren macht es aber fundamental von der Newton'schen Mechanik Gebrauch.

¹¹<http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallaxmonet.html>

¹²<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/backhaus/AstroPraktikum/>

¹³<http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallaxmonet.html>

¹⁴Die Idee geht auf Kepler zurück. Er konnte an Mars keine tägliche Parallaxe messen und schloss daraus, dass das Sonnensystem mindestens dreimal so groß sein musste, wie noch von Kopernikus angenommen worden war.

Literatur

- [1] U. Backhaus, *Die Mondentfernung selbst gemessen*, Sterne und Weltraum 58/1, (2019)
- [2] M. Federspiel: *Wie ich die Mondentfernung bestimme*, Sterne und Weltraum 47/2, 76 (2008)
- [3] M. Wagenschein: *Wie weit ist der Mond entfernt?*, in: Naturphänomene sehen und verstehen. Klett, Stuttgart 1988¹⁵

¹⁵<http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/WagenscheinWieweitistderMondvonunsentfernt.pdf>