

# Die Mondentfernung selbst gemessen

## Zusätzliches Material

Udo Backhaus, Universität Duisburg-Essen

*Aus Platzgründen mussten im Aufsatz einige zusätzliche Anregungen und Erläuterungen entfallen. Sie sollen hier ergänzt werden. Dabei handelt es sich um kurze Beschreibungen weiterer Messmöglichkeiten für die Entfernung des Mondes und um eher technische Details der Auswertung.*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Nachbemerkungen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Weitere Messmethoden</b>	<b>2</b>
2.1	Die am einfachsten zu verstehende und auszuwertende Methode . . . . .	2
2.2	Parallaxenmessung bei Sonnenfinsternis . . . . .	3
2.3	Parallaxenmessung bei Mondfinsternis . . . . .	4
2.4	Größe des Erdschattens bei Mondfinsternis . . . . .	5
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>6</b>
A.1	Messung der Mondkoordinaten mit Astrometry.net . . . . .	6
A.2	Selbstausmessen der Fotos . . . . .	6
A.2.1	Winkelmessungen auf Digitalfotos . . . . .	6
A.2.2	Die äquatorialen Koordinaten des Mondes . . . . .	7
A.3	Ableitung der Mondentfernung aus der Parallaxenmessung . . . . .	9
A.3.1	Der Projektionswinkel . . . . .	9
A.3.2	Exakte Methode . . . . .	9
A.4	Interpolation der Mondbewegung . . . . .	11

## 1 Nachbemerkungen

Der Vorteil, die Entfernung des Mondes durch Messung seiner täglichen Parallaxe oder der Änderung seiner Größe zwischen Aufgang und Kulmination zu bestimmen, besteht darin, dass man keinen weit entfernten Beobachter als Partner für simultane Beobachtungen benötigt. Sie stellen deshalb in vielen Fällen leichter zu realisierende Möglichkeiten dar, zu einem *eigenen Messwert* für die Mondentfernung zu kommen. Dafür aber geht ein wesentlicher Teil des Reizes verloren, der mit weltweiter, internationaler Kooperation immer verbunden ist.

Auch die allein durchzuführenden Messungen verfügen über einen gewissen Erlebnischarakter (stabiles Wetter in zwei aufeinander folgenden Nächten, Aufsuchen eines geeigneten, evtl. weit von zuhause entfernten Beobachtungsortes, ...) und erfordern eine genaue Planung (helle Referenzobjekte in der Nähe des Mondes, hohe Kulmination, ...). Beides ist aber deutlich weniger ausgeprägt als bei einer Parallaxenmessung durch weit voneinander entfernte Beobachter (siehe z. B. [2] und [3]). Die „Absprachen“ mit sich

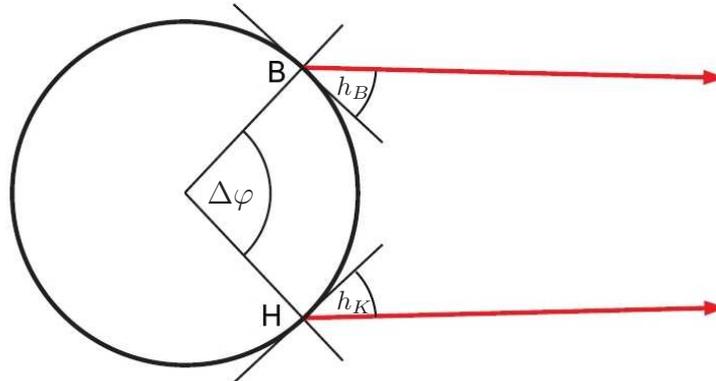


Abbildung 1: Messung der Mondparallaxe durch simultane Messung der Kulminationshöhe an zwei Orten gleicher geografischer Länge (nach Wagenschein [7])

selbst sind deutlich einfacher als mit weit entfernten Beobachtern, die manchmal nicht genau zuhören bzw. lesen und Probemessungen und andere Vorbereitungen vielleicht für überflüssig halten.

Hier noch ein paar Vorschläge zur Verbesserung der Genauigkeit:

- Bei den beiden Verfahren der Parallaxenmessung verbessern größere Brennweiten die Messung der Winkelabstände dichter benachbarter Referenzobjekte – wenn sie nicht vom Mond überstrahlt werden (z. B. Planeten).
- Auch in Deutschland kann die Änderung der Mondgröße zwischen Aufgang und Zenit gemessen werden<sup>1</sup>. Allerdings ist die hier zu messende Größenänderung deutlich kleiner als in Namibia bei einer Mondkulmination nahe beim Zenit. Für eine genaue Messung der Mondgröße ist eine möglichst formatfüllende Abbildung des Mondes von Vorteil. Gegenüber meiner Messung sollte dadurch eine doppelte Genauigkeit erreicht werden können.
- Von Europa aus sollten Messungen versucht werden, wenn der Mond in möglichst großer Höhe kulminiert, also z. B. am Vollmond im Winter oder am zunehmenden Halbmond im Frühjahr.

## 2 Weitere Messmethoden

### 2.1 Die am einfachsten zu verstehende und auszuwertende Methode

Während meines Aufenthaltes in Namibia wollten wir am 29. Mai ein viertes Verfahren zur Messung der Mondentfernung testen. Auch wenn wir damit nicht erfolgreich waren, will ich die simultane Messung der Höhe des Mondes in der Nähe seiner Kulmination hier kurz

<sup>1</sup>siehe die A&I-Projektseite im Internet <http://www.astronomie-und-internet.de/lunarparallaxmonet.html>

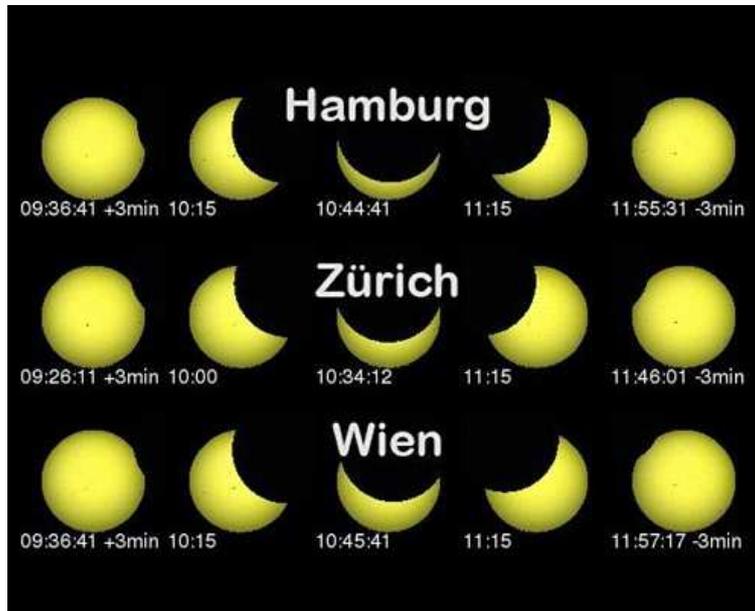


Abbildung 2: Der (simulierte) Verlauf der Sonnenfinsternis am 20. März 2015 für verschiedene Städte (Copyright A. Barmettler/CalSky)

erläutern, weil sie die mit Abstand am einfachsten zu durchschauende und auszuwertende Methode ist, die Entfernung des Mondes zu messen. Martin Wagenschein beschreibt sie in seinem Aufsatz „Wie weit ist der Mond von uns entfernt?“ ([7], Abb. 1).

An einem der vorangegangenen Tage hatten wir die Mittagshöhe der Sonne in Namibia und Bochum gemessen und daraus eine Differenz der geografischen Breiten von recht genau  $74^\circ$  abgeleitet. Die Messung der Kulminationshöhe des Mondes scheiterte dann aber an einem Missverständnis zwischen Bochum und Namibia. Hätten wir, wie geplant, zu den Zeiten der jeweiligen Kulmination die Mondhöhe gemessen (Namibia um 4:49 UT:  $h_N = 75.4^\circ$ , Bochum um 5:27 UT:  $h_B = 29.0^\circ$ ), hätte sich, aus einer leicht verständlichen Idee und durch eine sehr einfache Rechnung, ein Parallaxenwinkel von  $p = 1.6^\circ$  ergeben:

$$p = 360^\circ - \Delta\varphi - (90^\circ + h_B) - (90^\circ + h_N) = 180^\circ - (\Delta\varphi + h_B + h_N).$$

Dieser liegt überraschend nahe bei dem korrekten Wert. Wie genau wir die Mondhöhen tatsächlich gemessen hätten, wissen wir aber leider nicht. Im Jahr 2019 wird sich vielleicht eine erneute Gelegenheit für einen solchen Messversuch geben.

Die Schwierigkeit dieser Methode liegt natürlich darin, genügend weit entfernte Partner zu finden, die sich ungefähr auf demselben Längengrad befinden. Zwischen der Hakos-Farm und Bochum beträgt der Längengradunterschied immerhin  $9.1^\circ$ .

## 2.2 Parallaxenmessung bei Sonnenfinsternis

Sonnenfinsternisse bieten eine andere Möglichkeit, die Mondparallaxe zu messen. Sie ist so genau, dass relativ kleine Abstände zwischen den Beobachtern, z. B. innerhalb von Deutschland, Österreich und der Schweiz (Abb. 2), ausreichen, um zu befriedigenden

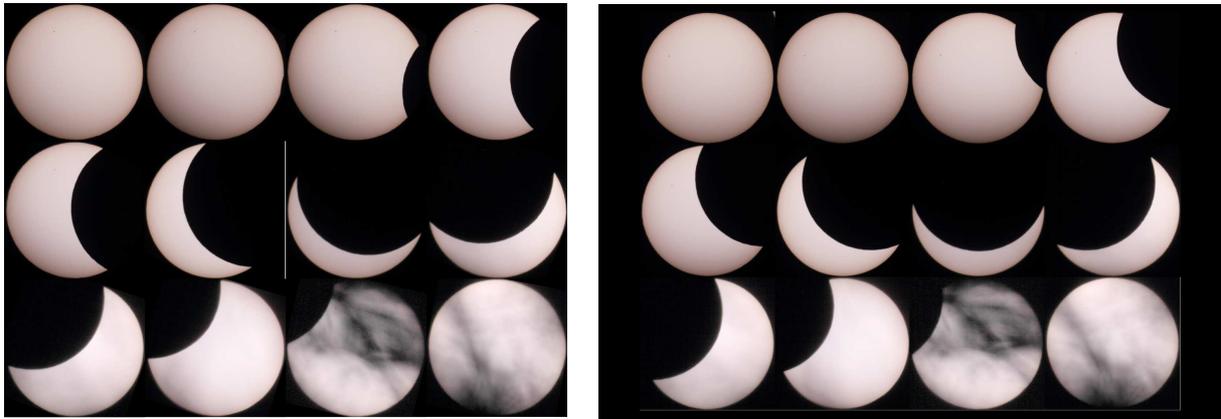


Abbildung 3: Serienaufnahme der Sonnenfinsternis am 20. März 2015 von Hannover aus. Links: untere Bildkante parallel zum Horizont, rechts: alle Sonnenbilder eingenordet

Ergebnissen zu gelangen. Zwei Schülergruppen in Wuppertal und Frauenfeld (Schweiz) werteten zum Beispiel gleichzeitige Aufnahmen der partiell verfinsterten Sonne aus und konnten daraus mit 371000 km eine Mondentfernung ableiten, die um weniger als 4% vom korrekten Wert abwich.

Eine entsprechende komplette Serie habe ich in Hannover aufgenommen (Abb. 3), ohne nach Partnern für die Messung der Mondentfernung zu suchen. Eine wesentliche Schwierigkeit dieses Verfahrens besteht darin, die Drehung des Sonnenbildes gegen die Nord-Süd-Richtung zu bestimmen. Ich fotografiere dazu die Sonne *mit feststehender Kamera* im Abstand von 150 Sekunden. Die Bewegung der Sonne zeigt dann die genaue Ost-West-Richtung auf den Bildern<sup>2</sup>.

Die Auswertung solcher Bilder ist zwar nicht einfach. Das Hauptproblem dieser Methode liegt aber in der Seltenheit von Sonnenfinsternissen. Die nächsten in Deutschland sichtbaren Ereignisse finden am 10. Juni 2021 und am 25. Oktober 2022 statt.

### 2.3 Parallaxenmessung bei Mondfinsternis

Bei einer Mondfinsternis ist das Licht des Mondes so stark abgeschwächt, dass es leicht ist, Mond und benachbarte Sterne auf demselben Bild richtig zu belichten. Deshalb kann beim Fotografieren eine größere Brennweite, und damit ein kleinere Bildausschnitt gewählt werden. Martin Federspiel hat das in einem SuW-Aufsatz beschrieben (Federspiel 2008 [5]). Ronald Schüneck, ein Mitglied unserer Gruppe „Astronomie & Internet im Ruhrgebiet“, hat das Verfahren bei der Finsternis am 27. Juli 2018 erfolgreich angewendet<sup>3</sup>. Dabei betrug der projizierte Abstand zwischen den beiden Beobachtern nur 77 km!

Der größte Nachteil dieser Methode liegt wieder in der Seltenheit von Mondfinsternissen. Allerdings bietet das Jahr 2019 noch zwei Gelegenheiten – bei der totalen Finsternis in der Nacht und am frühen Morgen des 21. Januar und am Abend des 16. Juli.

<sup>2</sup>Das Verfahren haben wir erfolgreich bei den Transits von Venus und Merkur angewendet, siehe z. B. <http://www.venus2012.de/>.

<sup>3</sup>siehe die A&I-Projektseite a.a.O.. Auf der Seite befindet sich auch eine Excel-Tabelle, mit der die entsprechende Auswertung leicht durchgeführt werden kann.



Abbildung 4: Ausmessen der Radien von Mond und Erdschatten auf einem Digitalbild)

## 2.4 Größe des Erdschattens bei Mondfinsternis

Mondfinsternisse bieten noch eine zweite Möglichkeit, die Entfernung zum Mond zu messen, und für diese braucht man keinen Partner an einem anderen Ort. Sie besteht darin, die Größe des Erdschattens auf dem partiell verfinsterten Mond mit der Mondgröße zu vergleichen (Abb. 4, siehe z. B. Backhaus 2016 [4] und die entsprechende Aufgabe des „Astronomischen Schlechtwetter-Praktikums“<sup>4</sup>).

Das Verfahren wird auch auf unserer A&I-Seite über Messungen der Mondentfernung beschrieben.

*Ich danke den Freunden und Kollegen von der Gruppe „Astronomie & Internet im Ruhrgebiet“ für viele anregende Diskussionen über die hier vorgestellten Projekte. Insbesondere mit Alfred Knülle-Wenzel und Ronald Schönecke habe ich häufig gemeinsam, aber an verschiedenen Orten, den Mond beobachtet und fotografiert, um verschiedene Effekte sichtbar und auswertbar zu machen. Der Erfolg der hier beschriebenen Messungen beruht wesentlich auf diesen Vorversuchen.*

<sup>4</sup><http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroPraktikum/>

## A Anhang

### A.1 Messung der Mondkoordinaten mit Astrometry.net

Am einfachsten kann man die Koordinaten des Mondes auf einem Digitalfoto dadurch bestimmen, dass man das Bild zu Astrometry.net<sup>5</sup> hochlädt und dort analysieren lässt. Bei Erfolg kann man von dort ein Bild (`newimage.fits`) herunterladen, dem zusätzlich das World-Coordinate-System (WCS) überlagert ist, das sich aber sonst nicht vom Original unterscheidet. Lädt man dieses Bild mit `AstroImageJ`, werden die äquatorialen Koordinaten des jeweils unter dem Mauszeiger befindlichen Bildpunktes angezeigt. Mit dem Aperture-Tool kann man die Koordinaten der Sterne auf dem Bild subpixelgenau messen. Die Position des Mondes findet man am genauesten, wenn man den Aperturradius entsprechend der Mondgröße auf dem Bild einstellt.

Astrometry.net löst die Astrometrie, indem es die Positionen der auf dem Bild sichtbaren Fixsterne misst<sup>6</sup>, ihre Positionen und Abstände mit Katalogdaten vergleicht, möglichst viele der Sterne identifiziert und so ihre Koordinaten findet. Die Analyse führt jedoch nicht zu einem Ergebnis, wenn zu wenig Sterne erkannt werden (z. B. wegen Wolken am Himmel oder wegen beschränkter Sicht durch Häuser, Bäume, ... in der Umgebung. Manchmal führt dann ein weiterer Versuch zum Erfolg, bei dem man unter „Advanced Settings“ die Suche durch zusätzliche Bedingungen eingrenzt, z. B. indem man die ungefähre Richtung angibt, in die die Kamera gerichtet war, und die Größe des Bildfeldes einschränkt.

Wie man die Position des Mondes auf den Fotos selbst bestimmen kann, wenn Astrometry.net keine Lösung findet, beschreibe ich in den folgenden Abschnitten. Excel-Tabellen, die die zugehörigen Rechnungen übernehmen, findet man auf der entsprechenden Projektseite unserer A&I-Gruppe.

### A.2 Selbstauss messen der Fotos

Um die Koordinaten des Mondes auf den Bildern *selbst* zu bestimmen, müssen zunächst seine Winkelabstände zu zwei Bezugsobjekten mit bekannten Koordinaten gemessen werden. Bei kurzen Brennweiten sind jedoch Winkelmessungen auf den Bildern etwas aufwändig (s. Anhang A.2.1), weil der Maßstab der Bilder nicht an allen Stellen gleich ist. Aus den Winkelabständen lassen sich seine Koordinaten  $(\alpha_i, \delta_i)$  berechnen (Anhang A.2.2).

#### A.2.1 Winkelmessungen auf Digitalfotos

Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass das Objektiv eine ideale Lochkameraabbildung des Sternenhimmels auf dem CCD-Chip erzeugt. Zusätzliche Abbildungsfehler des Objektivs werden vernachlässigt.

Da die Mondfotos mit kurzer Brennweite aufgenommen werden, variiert der Maßstab auf den Fotos. Um aus den Pixelkoordinaten  $(x_i, y_i)$  zweier Sterne auf einem Bild ihren Winkelabstand am Himmel berechnen zu können, müssen zunächst die Kantenlängen

---

<sup>5</sup><http://nova.astrometry.net/upload>

<sup>6</sup>Oft sind das viel mehr, als man selbst auf dem Foto erkennt.

$(l_x, l_y)$  des CCD-Chips der Kamera und die Anzahl der Pixel in beiden Richtungen  $(n_x, n_y)$  bekannt sein und daraus die Pixelkoordinaten  $(x_m, y_m)$  des Bildmittelpunktes und die Kantenlänge  $M$  der (hier als quadratisch vorausgesetzten) Pixel berechnet werden.

Mit einem Näherungswert für die Brennweite  $f_0$  des Objektivs können dann zunächst die „Azimutwinkel“  $A_i$  und „Höhenwinkel“  $h_i$  der Sterne bezüglich der Bildmitte berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_i &= \arctan 2(x_i - x_m, y_i - y_m) \\ h_i &= \arctan \frac{f_0}{M \sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2}} \end{aligned}$$

Daraus können dann mit dem Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie vorläufige Werte für die Winkelabstände abgeleitet werden:

$$w'_{ij} = \arccos(\sin h_i \sin h_j + \cos h_i \cos h_j \cos(A_i - A_j)) \quad (1)$$

Schließlich kann die Genauigkeit der Winkelmessung auf dem Bild dadurch gesteigert werden, dass der Näherungswert  $f_0$  für die Brennweite an die wahre Brennweite  $f$  angenähert wird. Dazu passt man die gemessenen Winkelabstände  $w'_{ij}$  der Sterne auf dem Foto an die wahren Werte  $w_{ij}$  an (die man aus den bekannten Koordinaten der Bezugsterne berechnet hat), z. B. indem man durch Variation der Brennweite die Summe der Fehlerquadrate minimiert.

## A.2.2 Die äquatorialen Koordinaten des Mondes

Zunächst werden zwei Referenzsterne  $S_1$  und  $S_2$  ausgewählt, die voneinander den Winkelabstand  $w_{12}$  haben, und ihre Winkelabstände  $w_i$  vom Mond bestimmt. Die Sterne und der Mond bilden dann ein sphärisches Dreieck  $S_1 S_2 M$  mit bekannten Seitenlängen.

Die Mondposition muss einen der Schnittpunkte zwischen zwei Kreisen auf der Himmelskugel bilden. Jeder dieser Kreise ist Schnittkreis zwischen der Kugel und einer Ebene, die folgendermaßen festgelegt ist: Der Ortsvektor

$$\vec{r}_i = (\cos \alpha_i \cos \delta_i, \sin \alpha_i \cos \delta_i, \sin \delta_i)$$

des entsprechenden Sterns  $S_i$  steht senkrecht auf der Ebene, und ihr Abstand vom Ursprung ist  $\cos w_i$  (s. Abb. 5).

Dann sind die Normalformen der Schnittebenen<sup>7</sup>

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r} = d_i \text{ mit } d_i = \cos w_i.$$

Gesucht ist zunächst die Parameterdarstellung der Schnittgeraden  $\vec{g}$  der beiden Ebenen:

$$\vec{g}: \vec{r} = \vec{b} + t\vec{m}$$

---

<sup>7</sup>siehe z. B. [https://de.wikipedia.org/wiki/Ebenengleichung#Hessesche\\_Normalform](https://de.wikipedia.org/wiki/Ebenengleichung#Hessesche_Normalform) und [https://de.wikipedia.org/wiki/Schnittgerade#Schnitt\\_zweier\\_Ebenen\\_in\\_Normalenform](https://de.wikipedia.org/wiki/Schnittgerade#Schnitt_zweier_Ebenen_in_Normalenform)

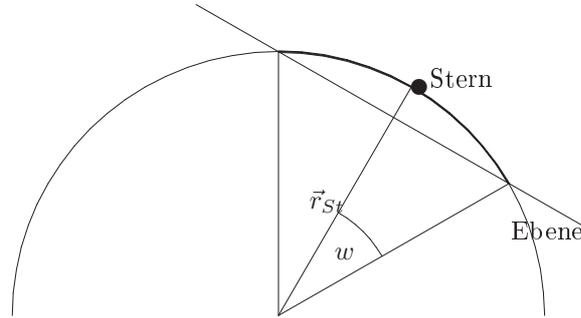


Abbildung 5: Alle Punkte auf der Einheitskugel, die denselben Winkelabstand  $w$  von einem Stern haben, bilden einen Kreis auf der Kugel. Dieser Kreis ist der Schnittkreis der Kugel mit einer Ebene.

- Der Richtungsvektor  $\vec{m}$  ist

$$\vec{m} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (r_{1y}r_{2z} - r_{1z}r_{2y}, r_{1z}r_{2x} - r_{1x}r_{2z}, r_{1x}r_{2y} - r_{1y}r_{2x}).$$

- Der Stützvektor  $\vec{b}$  kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{b} = \frac{d_1 r_1^2 - d_2 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \vec{r}_1 + \frac{d_2 r_1^2 - d_1 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \vec{r}_2$$

Da die  $\vec{r}_i$  Einheitsvektoren sind, kann man diese Beziehung (mit  $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \cos w_{12}$ ) folgendermaßen vereinfachen:

$$\vec{b} = \frac{\cos w_1 - \cos w_2 \cos w_{12}}{\sin^2 w_{12}} \vec{r}_1 + \frac{\cos w_2 - \cos w_1 \cos w_{12}}{\sin^2 w_{12}} \vec{r}_2$$

Gesucht sind nun die Schnittpunkte  $\vec{s}_i$  dieser Geraden mit der Einheitskugel, d. h. zwei Parameter  $t_i$ , für die gilt:

$$\vec{s}_i = \vec{b} + t_i \vec{m} \text{ mit } s_i^2 = 1.$$

Das ist aber eine quadratische Gleichung für  $t$ :

$$\begin{aligned} (b_1 + tm_1)^2 + (b_2 + tm_2)^2 + (b_3 + tm_3)^2 &= 1 \implies \\ (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) t^2 + 2(b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3) t + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 1) &= 0 \implies \\ \text{oder: } At^2 + Bt + C &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$t_1 = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C} \text{ und } t_2 = -\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C}$$

Rechnet man die kartesischen Koordinaten  $\vec{s}_i$  der Schnittpunkte in die entsprechenden sphärischen Koordinaten  $(\alpha_i, \delta_i)$  um, ist in der Regel leicht zu erkennen, welche der beiden Lösungen die richtige ist.

## A.3 Ableitung der Mondentfernung aus der Parallaxenmessung

### A.3.1 Der Projektionswinkel

Sind die geografischen Koordinaten  $(\varphi_i, \lambda_i)$  der beiden Beobachter bekannt, lässt sich die Mondentfernung auf folgende zwei Weisen ableiten, nachdem der lineare Abstand  $\Delta$  zwischen den Beobachtungsorten aus den entsprechenden kartesischen Koordinaten  $\vec{r}_i$  berechnet worden ist:

$$\Delta = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (2)$$

Nimmt man zunächst vereinfachend an, dass der Verbindungsvektor  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  der Beobachtungsorte senkrecht auf der Richtung zum Mond steht, lässt sich die Mondentfernung  $d$  näherungsweise berechnen:

$$d = \frac{\Delta}{p} \quad (p \text{ im Bogenmaß})$$

Bei einem anderen Winkel zwischen dem Verbindungsvektor und der Richtung  $\vec{r}_M$  zum Mond kommt es nur auf den projizierten Abstand  $\Delta_{\perp}$  an:

$$d = \frac{\Delta_{\perp}}{p} = \frac{\Delta \sin w_p}{p} \text{ mit } w_p = \arccos \left( \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_M \right) \quad (3)$$

Dazu müssen die Ortsvektoren der Beobachter im äquatorialen Koordinatensystem berechnet werden. Dazu mache man sich klar, dass die Deklination der Orte gleich ihrer geografischen Breite ist und dass ihre Rektaszension mit ihrer Sternzeit zum Zeitpunkt der Messung (Bochum 19:07:03, Hakos 19:43:29) übereinstimmt<sup>8</sup>.

### A.3.2 Exakte Methode

Für die exakte Berechnung ist wieder ein wenig Vektorrechnung erforderlich: Wenn  $\vec{r}_i$  die kartesischen Ortsvektoren der Beobachter sind und  $\vec{e}_i$  die Richtungen, in der sie den Mond sehen, dann muss sich der Mond irgendwo auf den Geraden befinden, die durch

$$\vec{r}_i + \nu \vec{e}_i, \quad \nu > 0$$

beschrieben werden können. Wenn die Beobachter den Mond gleichzeitig anvisieren, dann muss sich der Mond am Schnittpunkt der beiden Sichtlinien befinden. Es muss also gelten:

$$\vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1 = \vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2, \quad \lambda, \mu > 0 \quad (4)$$

Das sind drei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden Unbekannten  $\lambda$  und  $\mu$ ! Anders als in einer Ebene werden sich die beiden Geraden nur bei exakten Messungen schneiden. Andernfalls verfehlen sie einander („windschiefe Geraden“). Wegen immer auftretender Messfehler wird also das Gleichungssystem (4) niemals lösbar sein.

---

<sup>8</sup>siehe z. B. das Theoriepapier zum Projekt [3]:  
<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYAParallaxe.pdf>, S. 5ff

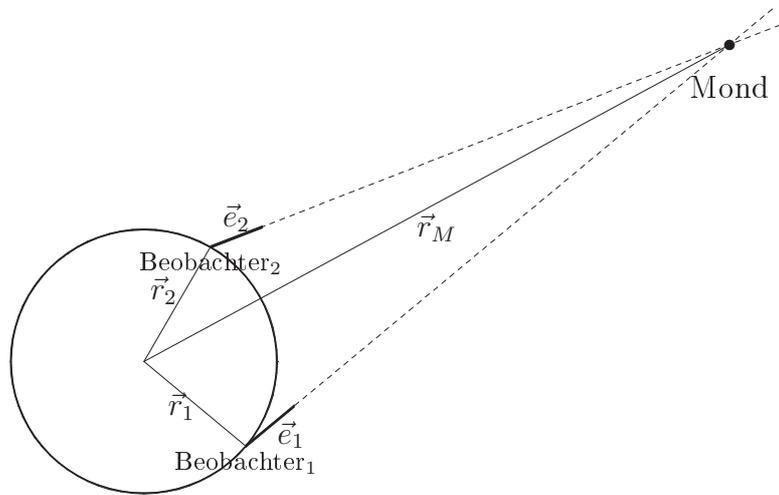


Abbildung 6: Zur Berechnung des Schnittpunktes der beiden Sichtlinien

Aus diesem Grunde sind wir gezwungen, statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden zu berechnen. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten  $\vec{P}_1 = \vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1$  und  $\vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2$  auf den Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

$$\begin{aligned}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0\end{aligned}$$

Das ist ein System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten  $\lambda$  und  $\mu$ . Eine einfache Umformung führt auf die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \\ \lambda - \mu &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2},\end{aligned}$$

aus denen die gesuchten Parameter leicht zu berechnen sind:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}((\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)), \\ \mu &= \frac{1}{2}((\lambda + \mu) - (\lambda - \mu))\end{aligned}$$

Die Entfernung des Mondes ergibt sich dann schließlich zu

$$r_M \approx |\vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1| \approx |\vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2| \quad (5)$$

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Minimalabstand  $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$  der beiden Sichtlinien nehmen.

## A.4 Interpolation der Mondbewegung

Will man, anders als bei der Ableitung im Aufsatz, den nichtlinearen Charakter der sphärischen Koordinaten berücksichtigen, ist die Interpolation zwischen den im Abstand von 24h50min gemessenen Mondpositionen etwas schwieriger, weil dazu Kenntnisse aus der Vektorrechnung erforderlich sind:

1. Man nimmt an, dass der Mond *in seiner Bahnebene* eine gleichförmige Kreisbewegung vollführt. Den (Einheits-) Normalenvektor  $\vec{n}$  dieser Ebene erhält man aus den rechtwinkligen Koordinaten  $\vec{r}_i$  der beiden gemessenen Mondpositionen:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3|}$$

Den zweiten Einheitsvektor  $\vec{e}_\perp$ , der  $\vec{e}_1 = \vec{r}_1$  zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Bahnebene ergänzt, erhält man aus

$$\vec{e}_\perp = \vec{n} \times \vec{r}_1.$$

2. Der während der Zeitspanne  $\Delta t = t_3 - t_1$  insgesamt vom Mond überstrichene Winkel  $\Delta\varphi$  ergibt sich aus

$$\Delta\varphi = \arccos(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3).$$

Nimmt man nun an, dass der Mond die Erde während des betrachteten Mondtages gleichförmig umläuft, dann hat er zu einem beliebigen Zwischenzeitpunkt  $t_2$  den Winkel

$$\varphi(t_2) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}(t_2 - t_1) \quad (6)$$

überstrichen. Sein Ortvektor  $\vec{r}'(t_2)$  ist demnach

$$\vec{r}'(t_2) = \cos \varphi(t_2) \vec{e}_1 + \sin \varphi(t_2) \vec{e}_\perp. \quad (7)$$

Daraus lassen sich die parallaxenfreien Koordinaten des Mondes ( $\alpha'(t_2), \delta'(t_2)$ ) zum Zeitpunkt  $t_2$  berechnen. Sie stellen die Mondposition dar, die ein *virtueller Beobachter* messen würde, der sich seit der Zeit  $t_1$  auf der Erde so bewegt hat, dass sich seine Stellung *im Raum* relativ zu Erdmittelpunkt und Mond nicht verändert hat. Im rotierenden Bezugssystem, in dem der Mond ruht und sich die Erde in 24h50min einmal dreht, ändert dieser Beobachter seine Position nicht. Er entfernt sich vom Beobachtungsort mit der synodischen Winkelgeschwindigkeit  $\frac{360^\circ}{24h50min} \approx 14.5 \frac{^\circ}{h}$ .

## Literatur

- [1] Backhaus, Udo: *Die Mondentfernung*, in „Aufgaben für eine Schlechtwetter-Astronomie“, <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroPraktikum/>

- [2] Backhaus, Udo: *Simultaneously Observing and Photographing the Moon*, (im Internet unter <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/moonproject.pdf>; Internetseite des Projektes: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/moonproject.htm>)
- [3] Backhaus, Udo: *Die Größe der Erde und die Entfernung des Mondes. Anregungen zur astronomischen Zusammenarbeit zwischen Schulen*. Praxis der Naturwissenschaften/Physik 62/8, 18 (2013) (Internetseite des Projektes: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYA2009-MoonsParallax.html>)
- [4] Backhaus, Udo: *Wahrnehmungen und Gedanken beim Betrachten einer Mondfinsternis*, MNU Journal 70/6, 364 (2017)<sup>9</sup>
- [5] Federspiel, Martin , *Wie ich die Mondentfernung bestimme*, Sterne und Weltraum 47/2, 76 (2008)
- [6] Reble, Martin: *Die Bestimmung der Mondentfernung nach Hipparch*, Astronomie + Raumfahrt im Unterricht 41/4, 12 (2004)
- [7] Wagenschein, Martin: *Wie weit ist der Mond entfernt?* in: Wagenschein, M.: *Naturphänomene sehen und verstehen*, Klett: Stuttgart 1988 (im Internet unter <http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/WagenscheinWieweitistderMondvonunsentfernt.pdf>)

---

<sup>9</sup>im Internet unter [http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/publicat/BetrachteneinerMondfinsternis\(MNU\\_6\\_2017\\_364-369\).pdf](http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/publicat/BetrachteneinerMondfinsternis(MNU_6_2017_364-369).pdf)