Entfernungsbestimmung durch Auswertung von Parallaxenmessungen
Beispiel: Kleinplanet Irene am 16. Februar 2017

Udo Backhaus, Jürgen Möllmanns, Ronald Schünecke

2. April 2017

1 Einleitung

Parallaxenmessungen an Kleinplaneten mit den Monet-Teleskopen in Texas und Südafrika gehören seit langer Zeit zu den Projektplänen unserer A & I - Gruppe, Leider sind noch nie beide Teleskope gleichzeitig betriebsbereit gewesen. In den Weihnachtsferien 2016/17 erinnerte sich Ronald an das Projekt und versuchte es mit den Teleskopen des LCOGT („Las Cumbres Observatory Global Telescope“[1]) anhand eher zufällig entstandener Fotos von Melpomene. Dieser Versuch schlug leider fehl, weil die mit anderer Zielsetzung aufgenommenen Fotos nicht gleichzeitig entstanden waren. Trotzdem zeigte dieser Versuch, dass eine Parallaxenmesung im Rahmen des LCOGT-Netzwerkes möglich sein sollte. Ronald startete deshalb nach einem zweiten Versuch an Vesta am 16. Februar eine Messung an dem Kleinplaneten Irene, der zu einem befriedigendem Ergebnis führte.

Die Ergebnisse der Messung an Irene und ihre Auswertung werden hier (hoffentlich) nachvollziehbar beschrieben. Dabei greife ich auf eine ausführliche Beschreibung des Algorithmus zur Berechnung der Parallaxe zurück, die ich 2009 geschrieben habe ([1]).

2 Die Messung

Irene wurde von den Teleskopen auf dem Cerro Tololo[2] und auf dem Teide[3] nahezu zeitgleich fotografiert (Abb. 1). Die folgende Tabelle zeigt die geografischen Koordinaten der Beobachtungsorte und die Aufnahmezeitpunkte:

Teleskop	geogr. Breite	geogr. Länge	Uhrzeit (UT)
Teide	$28°18'00''$	$-16°30'35''$	4:30:15
Cerro Tololo	$-30°10'2.4''$	$289°11'43.2''$	4:30:44

Ronald ließ die Astrometrie der Bilder von `Astrometry.net` durchführen. Auf den Ergebnisbildern („new-image.fits“) mit WCS-Koordinaten hat er die folgenden Koordinaten von Irene gemessen[4]:

[1] `https://lco.global/`
[2] `https://lco.global/site/cerro-tololo/`
[3] `https://lco.global/site/teide/`
[4] Rektaszension und Deklination werden hier so angegeben, wie sie von `AstroImageJ` geliefert werden.

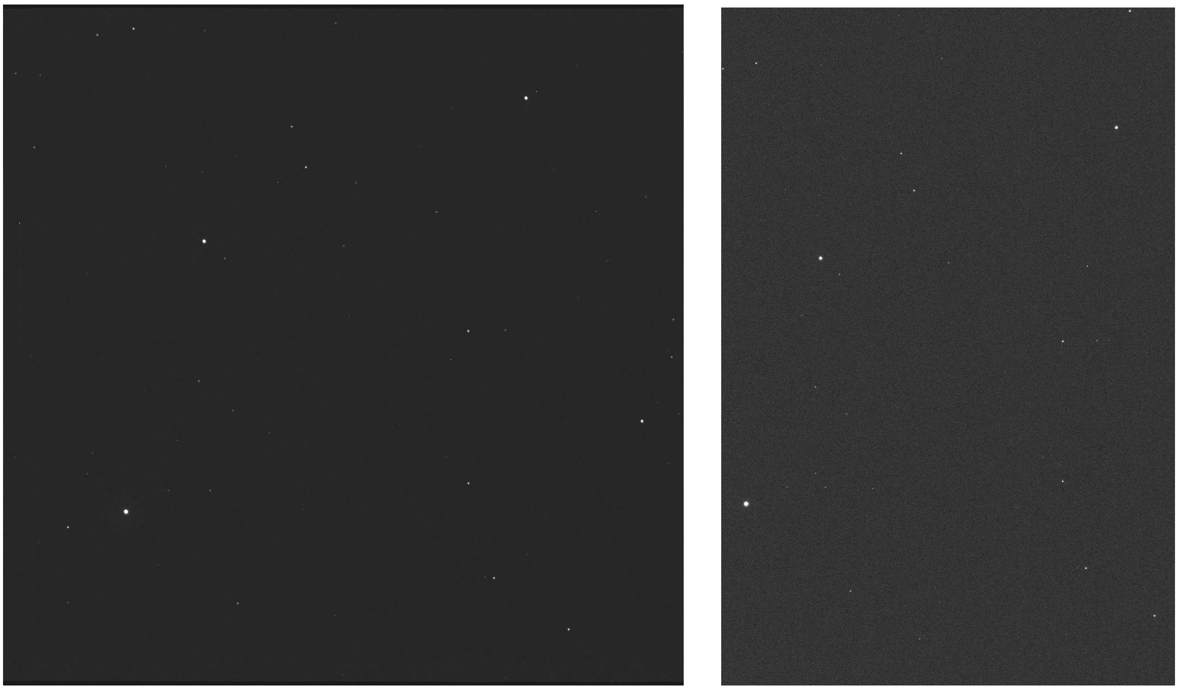

Abbildung 1: Irene, zeitgleich aufgenommen von den Teleskopen Cerro Tololo (links) und Teide

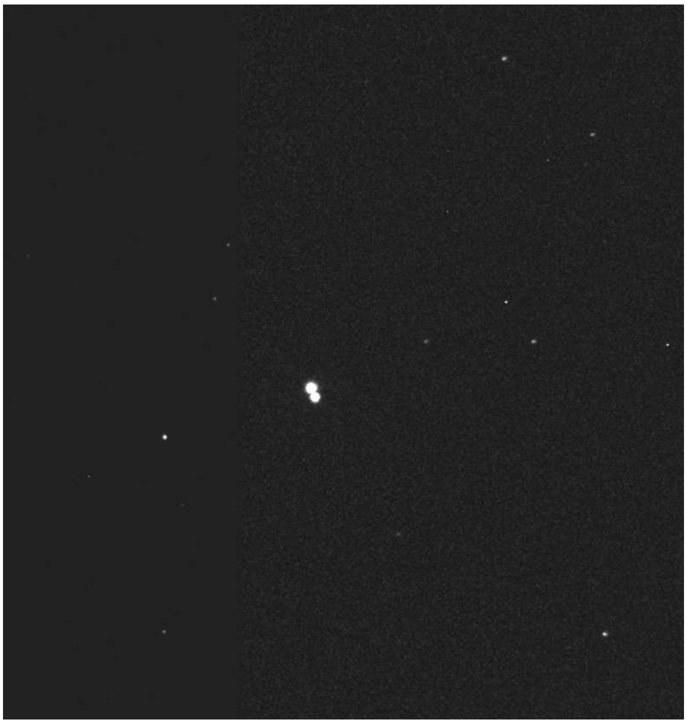

Abbildung 2: Die parallaktische Verschiebung von Irene zwischen Cerro Tololo und Teide beträgt etwa 6.8 Bogensekunden.

Teleskop	Uhrzeit (UT)	alpha	delta
Teide	4:30:15	10.559969°	24.821808°
Cerro Tololo	4:30:44	10.560059°	24.823777°

Nachdem man die beiden Bilder mit Hilfe der entsprechenden Routine von `ImageJ` aligned hat, wird die parallaktische Verschiebung des Kleinplaneten sichtbar (Abb. 2

3 Etwas Theorie

Bei der astronomischen Entfernungsbestimmung durch Messung der Parallaxe handelt es sich im Kern um die Berechnung der Höhe eines sehr langen Dreiecks mit dem Spitzenwinkel p und der Basislänge Δ. Der Winkel p ist der Unterschied zwischen den Richtungen, in denen zwei entfernte Beobachter gleichzeitig dasselbe Objekt beobachten. Δ ist der *lineare* Abstand zwischen den beiden Beobachtungsorten. Wenn das Dreieck gleichschenklig ist, lässt sich die Höhe des Dreiecks – und damit die Entfernung d des Objekts – sehr einfach berechnen:

$$d = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{p}{2}} \approx \frac{\Delta}{p}$$

Die Näherung gilt, wenn p im Bogenmaß ausgedrückt wird, weil der Parallaxenwinkel deutlich kleiner als 1° ist.

Der Parallaxenwinkel p lässt sich einfach berechnen, wenn beide Beobachtungsrichtungen als Äquatorialkoordinaten Rektaszension α und Deklination δ angegeben werden:

- Allgemein lässt sich der eingeschlossene Winkel mit dem Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie berechnen:
$$\cos p = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{1}$$
- Die kleinen Parallaxen lassen sich auch mit „Pythagoras“ berechnen:
$$p = \sqrt{((\alpha_1 - \alpha_2)\cos \delta)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}$$

Wenn das Dreieck nicht symmetrisch ist, der Winkel w zwischen der Basisstrecke und der Richtung zum Objekt kein rechter Winkel ist, kommt es auf die Projektion $\Delta_\perp = \Delta \sin w$ der Basislänge senkrecht zur Richtung zum Objekt an:

$$d = \frac{\Delta_\perp}{p} = \frac{\Delta \sin w}{p} \tag{2}$$

Die Basislänge Δ lässt sich berechnen, wenn man, die Erde als kugelförmig vorausgesetzt, zunächst aus den geographischen Koordinaten den zugehörigen Zentrumswinkel mit dem Seitenkosinussatz (1) bestimmt. Die Bestimmung des Projektionswinkel ist am einfachsten mit etwas Vektorrechnung.

Da damit auch die anderen Teile der Rechnung wesentlich vereinfacht werden, soll nun die Parallaxe von Irene vektoriell berechnet werden.

4 Die Auswertung

Letztendlich soll die *geozentrische* Entfernung Irenes bestimmt werden, d. h. ihre Entfernung vom Erdmittelpunkt. Im allgemeinen liegen Erdmittelpunkt, die beiden Beobachtungsorte und der Kleinplanet nicht in einer Ebene – ein weiterer Grund, die Rechnungen vektoriell durchzuführen. Dazu werden zunächst Positionen der Beobachtungsorte in Äquatorialkoordinaten (α, δ) ausgedrückt ([1], S. 8f):

- Die geographische Breite gibt ebenso wie die Deklination den „Höhenwinkel" über der Äquatorebene an. Es gilt also: *Die Deklination eines Ortes auf der Erde ist gleich seiner geografischen Breite:* $\delta = \varphi$.
- Durch die Drehung der Erde ändert sich die Rektaszension eines Ortes auf der Erde in 23h56min um 24 h – genau wie seine Sternzeit. Wenn der Frühlingspunkt $(\alpha = 0)$ an dem Ort gerade kulminiert, ist seine Sternzeit (= Stundenwinkel des Frühlingspunktes) $\theta = 0h$. Deshalb gilt: *Die Rektaszension eines Ortes ist gleich seiner Sternzeit:* $\alpha = \theta$.

  Die Sternzeiten der Bobachtungsorte zum Zeitpunkt der Aufnahmen lassen sich im Kopf aus Datum, Uhrzeit und geografischer Länge abschätzen ([1], S. 9). Man kann sie sich aber von wohl jedem Planetariumsprogramm (z. B. `Guide`) anzeigen lassen[5].

Anschließend werden die Winkelkoordinaten in rechtwinklige Koordinaten umgerechnet[6]:

$$(\alpha, \delta) \longrightarrow \vec{r} = (x, y, z) = (\sin\alpha\cos\delta, \cos\alpha\cos\delta, \sin\delta)$$

Damit ergeben sich die Positionen der Beobachtungsorte und die Beobachtungsrichtungen folgendermaßen:

Ort/Richtung	Sternzeit θ	α	δ		x	y	z
Teide	13:10:46 $\hat{=}$ 197.69°	197.69°	28.30°	$\vec{e}_T$	-0.8388	-0.2676	0.4741
zu Irene		158.40°	24.8218°	$\vec{e}_1$	-0.8439	0.3341	0.4198
Cerro Tololo	09:34:04 $\hat{=}$ 143.52°	143.5175°	−30.1673°	$\vec{e}_C$	-0.6951	0.5140	-0.5025
zu Irene		158.4009°	24.8238°	$\vec{e}_2$	-0.8439	0.3341	0.4198

4.1 Vereinfachte Rechnung

Aus den carthesischen Koordinaten der beiden Beobachtungsrichtungen ergibt sich der Parallaxenwinkel p mit Hilfe des Skalarprodukts zwischen den Richtungen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, in denen Irene beobachtet wurde:

$$p = \arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = 8.35''$$

[5] Die Excel-Tabelle zur Auswertung solcher Messungen berechnet die lokalen Sternzeiten der Beobachtungsorte zu den Zeitpunkten der Aufnahmen automatisch.

[6] Die Exceltabelle (`http://www.astronomie-und-internet.de/parallaxes/minorplanets/parallaxes/Irene/2017-02-16/ParallaxeIrene_20170216-0430UT.xls`) enthält die vollständige Rechnung.

Zur Berechnung der Basislänge Δ bestimmt man zunächst den von den beiden Beobachtungsorten aufgespannten Zentralwinkel z im Erdmittelpunkt:

$$z = \arccos(\vec{e}_T \cdot \vec{e}_C)$$

und daraus dann die Basislänge (R_E=Erdradius):

$$\sin\frac{z}{2} = \frac{\frac{\Delta}{2}}{R_E} \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 2R_E \sin\frac{z}{2} = 1.26R_E = 8031km$$

Der Projektionswinkel w ergibt sich aus dem Skalarprodukt des Verbindungsvektors $\vec{e}_T - \vec{e}_C$ mit Irenes Richtungsvektor:

$$\cos w = \vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{e}_T - \vec{e}_C}{|\vec{e}_T - \vec{e}_C|} \quad \Longrightarrow \quad w = 102°.$$

Die projizierte Basislänge beträgt damit

$$\Delta_\perp = 1.23R_E = 7844km,$$

und die Entfernung von Irene ergibt sich nach (2) zu

$$\boldsymbol{d_I = 1.30AE = 30383R_E = 193790000km} \qquad (3)$$

Der wahre Abstand zur Zeit der Aufnahmen betrug laut MPC $d_I = 185800555km$.

4.2 Allgemeine vektorielle Parallaxenrechnung

Bei der vorangehenden Rechnung wird der Abstand des Objektes zur projizierten Basisstrecke bestimmt, nicht sein Abstand vom Erdmittelpunkt, der im Allgemeinen nicht in derselben Ebene liegt. Der Unterschied wird allerdings bei nahen Objekten wie Satelliten oder dem Mond wesentlicher sein als bei (Klein-) Planeten.

Abbildung 3 macht deutlich, dass sich der Ort von Irene aufgrund der gleichzeitigen Beobachtungen vom Teide und vom Cerro Tololo aus auf zwei Weisen ausdrücken lässt:

$$\vec{r}_I = \vec{e}_T + \lambda\vec{e}_1 \text{ und } \vec{r}_I = \vec{e}_C + \lambda\vec{e}_2, \qquad \lambda, \mu > 0$$

mit noch unbekannten Faktoren λ und μ. Gleichsetzen der rechten Seiten

$$\vec{e}_T + \lambda_s\vec{e}_1 = \vec{e}_C + \mu_s\vec{e}_2$$

ergibt ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen (für die drei Komponenten der Vektoren) mit nur zwei Unbekannten λ_s und μ_s. Im Allgemeinen wird es unlösbar sein: Aufgrund von Ungenauigkeiten werden sich die beiden Sichtlinien nicht schneiden („windschiefe“ Geraden).

Deshalb berechnen wir statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten $\vec{P}_1 = \vec{e}_T + \lambda_s\vec{e}_1$ und $\vec{P}_2 = \vec{e}_C + \mu_s\vec{e}_2$ auf den Sichtlinien, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

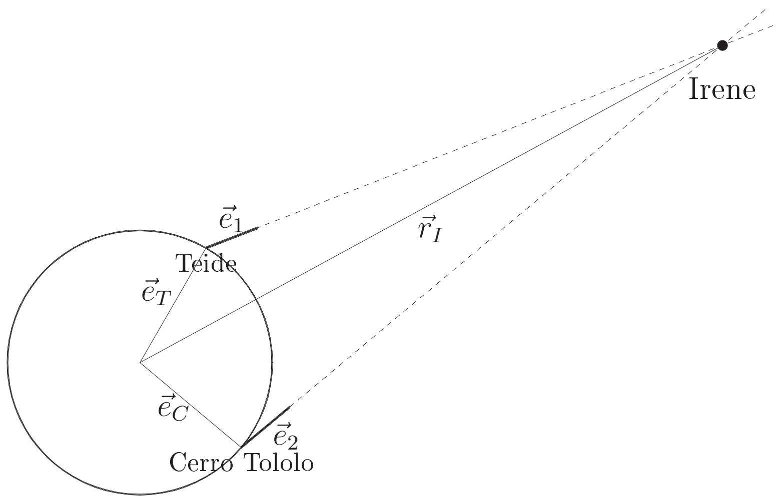

Abbildung 3: Zur Berechnung des Schnittpunktes der beiden Sichtlinien

$$\begin{aligned}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\ (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0\end{aligned}$$

Das ist ein System aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten λ_s und μ_s. Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$\begin{aligned}\lambda_s + \mu_s &= \frac{(\vec{e}_C - \vec{e}_T) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \\ \lambda_s - \mu_s &= \frac{(\vec{e}_C - \vec{e}_T) \cdot (\vec{e}_2 + \vec{e}_1)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}.\end{aligned}$$

Daraus lassen sich die gesuchten Parameter leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\lambda_s &= \frac{1}{2}\left((\lambda_s + \mu_s) + (\lambda_s - \mu_s)\right), \\ \mu_s &= \frac{1}{2}\left((\lambda_s + \mu_s) - (\lambda_s - \mu_s)\right)\end{aligned}$$

Irenes Ort im Raum ergibt sich dann schließlich zu

$$r_I = \vec{e}_T + \lambda_s \vec{e}_1 \approx \vec{e}_C + \mu_s \vec{e}_2 \tag{4}$$

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Minimalabstand $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$ der beiden Sichtlinien nehmen.

Mit den gemessenen Irene-Positionen ergeben sich nach diesem Verfahren mit

$$\boldsymbol{d_I = 1.28AE = 30383R_E = 192200000km} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{|\vec{P}_1 - \vec{P}_2| = 0.16R_E} \tag{5}$$

Ergebnisse, die fast mit denen übereinstimmen, die mit der vereinfachten Rechnung gewonnen wurden.

5 Fazit

Verglichen mit der vom MPC für den Messzeitpunkt angegebenen Entfernung zwischen Erde und Irene von $d_I = 1.242AE = 29131R_E = 185801000km$ ist bereits das Ergebnis, das mit der vereinfachten Rechnung gewonnen wurde, recht befriedigend – insbesondere wenn man bedenkt, dass wir dabei ein Dreieck mit einem Seitenverhältnis von etwa 1:35000 ausgemessen haben. Das mit der allgemeinen vektoriellen Methode gewonnene Ergebnis ist nur so unwesentlich besser, dass der zusätzliche Aufwand nicht lohnend erscheint.

Bei erneuten Messungen an näheren Objekten (5604 und 1434040 durch Jürgen[7]) konnten wir diese Aussage bestätigen: *Kleinplanetenparallaxen können mit sehr guter Genauigkeit bereits mit dem in Abschnitt 4.1 beschriebenen Verfahren gewonnen werden.*

Es wird sich aber sicher lohnen, anhand weiterer Parallaxenmessungen zu untersuchen, bis zu welchen Entfernungen befriedigende Ergebnisse gewonnen werden können!

Literatur

[1] Backhaus, U.: *Über den Zusammenhang zwischen geometrischer Parallaxe und der Entfernung des Mondes*, `http://www.astronomie-und-internet.de/Material/Literatur/IYAParallaxelang.pdf`

[7]Alle Ergebnisse unserer Parallaxenmessungen un d die zugehörigen Originalbilder und Auswertungstabellen können über unsere entsprechende Projektseite (`http://www.astronomie-und-internet.de/parallaxes/index.html`)heruntergeladen werden.