

Abbildung 1: Der Mond am Abend des 26. Dezember um 21:17 Uhr zwischen den Sternbildern Kleiner Hund und Zwillinge. Zur leichteren Orientierung wurden die hellsten Sterne hervorgehoben und einige Sternbildlinien eingezeichnet.

Die tägliche Parallaxe des Mondes

Beispiel: 26./27. Dezember 2015

U. Backhaus

3. Februar 2016

Der Vorteil, die Entfernung des Mondes dadurch zu bestimmen, dass man seine tägliche Parallaxe misst, besteht darin, dass man keinen weit entfernten Beobachter als Partner für simultane Beobachtungen benötigt. In diesem Papier wird die Methode ausführlich erläutert und anhand von Messungen demonstriert, die im Dezember 2015 durchgeführt wurden.

Vielleicht gelingt es, Leserinnen und Leser zu motivieren, die Messungen selbst zu wiederholen und dadurch zu einem selbst bestimmten Wert für die Entfernung zwischen Erde und Mond zu kommen.

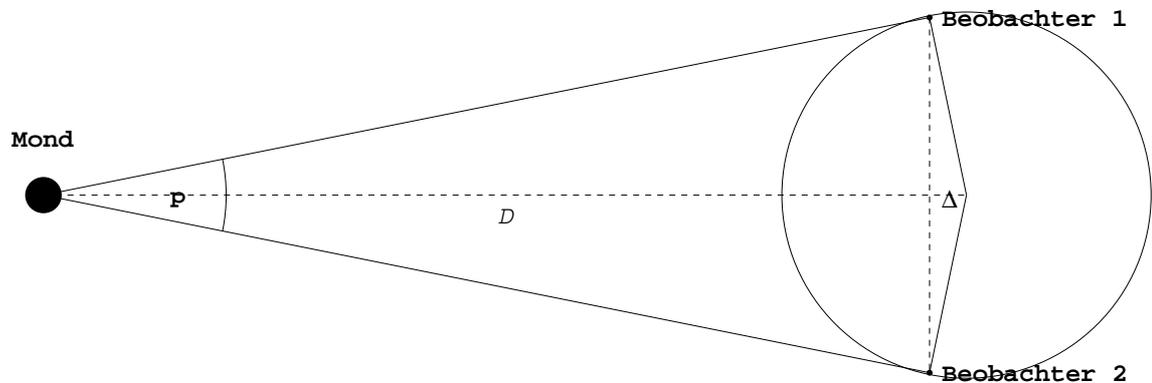


Abbildung 2: Das Prinzip der Entfernungsbestimmung durch Parallaxenmessung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Die Grundidee	3
3	Tipps und Anleitungen für eigene Messungen und Auswertungen	5
4	Ein Beispiel	7
4.1	Die Bestimmung der Mondpositionen	7
4.2	Bestimmung des Parallaxenwinkels	8
4.3	Die Entfernung des Mondes	9
5	Fazit	11
	Literatur	11
A	Anhang: Mathematische Details	12
A.1	Winkelmessungen auf Digitalfotos	12
A.2	Die äquatorialen Koordinaten des Mondes	13
A.3	Interpolation der Eigenbewegung des Mondes	15
A.4	Bestimmung des Parallaxenwinkels	16
A.5	Ableitung der Mondentfernung aus der Parallaxenmessung	16
A.5.1	Anschauliche Methode	17
A.5.2	Exakte Methode	17
A.6	Vergleich der beiden Interpolationsmethoden mit den wahren Parallaxen- werten	18

1 Einleitung

Die Entfernung eines astronomischen Objektes zu bestimmen, bedeutet, darauf zu „zeigen“, indem man es von verschiedenen, weit von einander entfernten Orten am Sternenhimmel *gleichzeitig* beobachtet oder fotografiert, und die Differenz p zwischen den jeweiligen Richtungen zu messen. Wenn der Abstand Δ zwischen den Beobachtern bekannt ist, ist es Prinzip einfach, die Entfernung d des Objektes zu berechnen (Abb. 2):

$$d = \frac{\frac{\Delta}{2}}{\tan \frac{p}{2}} \approx \frac{\Delta}{p} \quad (1)$$

Dazu ist es erforderlich, sich mit auf anderen Erdteilen zusammen zu tun und sich mit ihnen sehr genau zu gemeinsamen Messungen zu verabreden. Ich habe solche internationalen Projekte mehrmals durchgeführt, am Mond in den Jahren 2000 ([2]) und 2009 ([3]). Die dabei gemachten Erfahrungen waren für alle Teilnehmer faszinierend und lehrreich. Es zeigte sich jedoch auch, dass genaue Absprachen schwierig sind und von vielen Teilnehmern nicht genau genug eingehalten werden. Es reizt mich deshalb schon lange, mindestens seit 1999 [1], die Mondentfernung messen zu können, ohne mich mit weit entfernten anderen Beobachtern verabreden zu müssen – auch wenn dadurch viel von dem besonderen Reiz weltweiter Zusammenarbeit verloren geht.

2 Die Grundidee

Man kann die Notwendigkeit umgehen, einen weit entfernten Partner zu finden, indem man sich selbst durch die Drehung der Erde an einen anderen Ort „transportieren“ lässt. Die Parallaxe eines Objekts, die auf diese Weise gemessen wird, heißt seine „tägliche Parallaxe“. Beim Mond – wie auch bei den anderen Objekten des Sonnensystems – wird die Messmethode jedoch durch seine Eigenbewegung erschwert. Wenn man einige Stunden später wieder zum Mond schaut, hat er sich auf seiner Bahn um die Erde weiterbewegt. Der Unterschied zwischen den beiden beobachteten Mondpositionen wird deshalb eine Überlagerung aus Eigenbewegung und Parallaxe sein.

Glücklicherweise kann die Eigenbewegung dadurch abgetrennt werden, dass man die Position des Mondes zweimal im Abstand eines *Mondtages* ($24\text{h}50\text{m}^1$) misst. Dann ist die Konstellation von Erdmittelpunkt, Mond und Beobachter bei beiden Messungen dieselbe, und der Unterschied zwischen den beiden Mondpositionen (α_1, δ_1) und (α_3, δ_3) zeigt – parallaxenfrei! – die Positionsveränderung des Mondes aufgrund seiner Eigenbewegung. Nehmen wir dann an, dass sich der Mond in der Zwischenzeit gleichförmig bewegt², können wir in der Zwischenzeit gemessene Mondpositionen um die Eigenbewegung

¹Das ist die synodische Umdrehungszeit T_{syn} der Erde im rotierenden Bezugssystem, in dem der Mond ruht. Für $T_E = 23\text{h}56\text{m}$ und $T_M = 27.3\text{d}$ gilt die folgende Beziehung:

$$\omega_{syn} = \omega_E - \omega_M \quad \implies \quad \frac{1}{T_{syn}} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_M}.$$

²Etwas anderes können wir nicht tun, solange die Entfernung des Mondes nicht bekannt ist und deshalb die geozentrische Mondbewegung nicht aus Beobachtungsdaten abgeleitet werden kann.

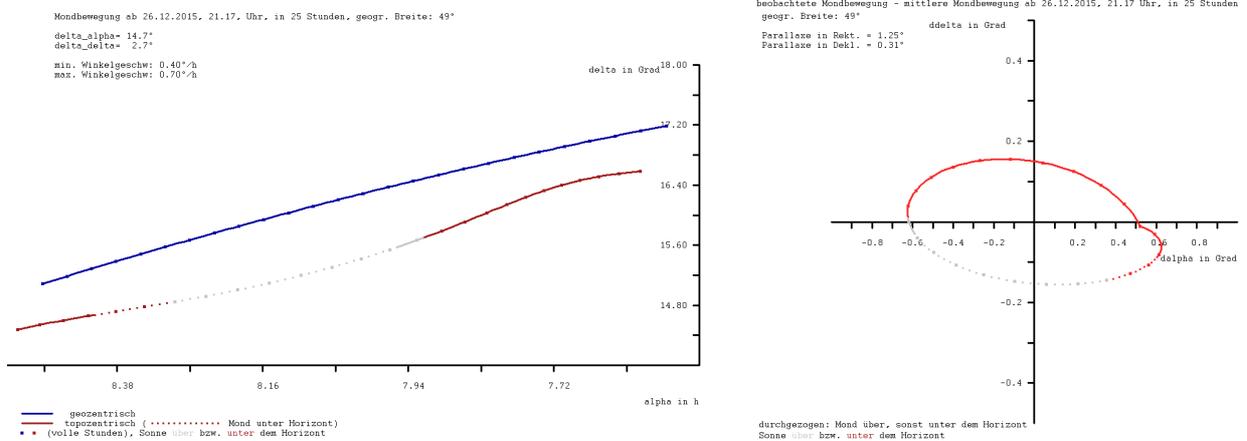


Abbildung 3: links: Berechnete geozentrische und topozentrische Mondpositionen während der interessierenden 25 Stunden; rechts: Durch Abzug der Eigenbewegung von den topozentrischen Mondpositionen ergibt sich eine Figur, die als parallaktische Ellipse interpretiert werden kann, die durch die Bewegung des Beobachters aufgrund der Erddrehung hervorgerufen wurde (erzeugt mit `Mondparallaxe.exe`, siehe auch [1]).

korrigieren und dadurch Messergebnisse erhalten, aus denen sich der Parallaxenwinkel berechnen lässt (s. Abbildung 3). Am einfachsten und anschaulichsten vielleicht, indem man für Rektaszension und Deklination einzeln eine konstante Änderungsrate annimmt (**Methode 1³**):

Korrektur von (α_2, δ_2) Seit Beginn des Mondtages (t_1) hat sich der Mond zur Zeit t_2 aufgrund seiner Eigenbewegung um

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1) \text{ bzw. } \Delta\delta = \frac{\delta_3 - \delta_1}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1)$$

weiterbewegt. Ohne Eigenbewegung wäre der Mond zur Zeit t_2 also *vom geografischen Ort der zweiten Messung aus* in der korrigierten Richtung

$$(\alpha'_2, \delta'_2) = (\alpha_2 - \Delta\alpha, \delta_2 - \Delta\delta)$$

beobachtet worden (Blickrichtung vom 7:11-Ort des Beobachters zur 21:17-Position des Mondes in Abb. 4). Aus den Mondpositionen (α_1, δ_1) und (α'_2, δ'_2) lässt sich der Parallaxenwinkel p berechnen, weil sie zwar nicht gleichzeitig, aber am „fixierten“ Mond vorgenommen wurden:

$$p' = \sqrt{(\alpha'_2 - \alpha_1 \cos \delta)^2 + (\delta'_2 - \delta_1)^2} \quad (2)$$

³Selbst wenn sich der Mond auf seiner Bahn gleichförmig bewegen würde, würden sich, weil seine Bahn gegen den Äquator geneigt ist, seine Rektaszension und Deklination nicht gleichförmig ändern. Eine Interpolation, die diese Bahnneigung berücksichtigt, wird in **Anhang A.3** beschrieben.

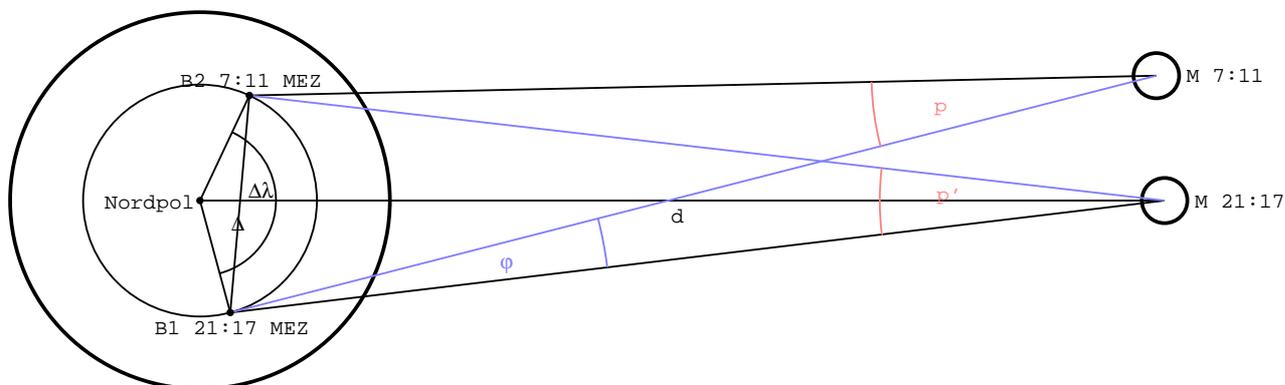


Abbildung 4: Messung der täglichen Parallaxe am Mond (s. Text): Die beiden blauen Linien sind von der Eigenbewegung bereinigte Positionen. Die Parallaxenwinkel p und p' beziehen sich auf die Methoden 2 bzw. 1.

Korrektur von (α_1, δ_1) Stellen wir uns einen *virtuellen Beobachter* vor, dem es gelingt, an der Erddrehung nicht teilzunehmen, und der dadurch am *Raumort* der ersten Messung bleibt⁴. Für diesen Beobachter würde sich die Position des Mondes nur durch dessen Eigenbewegung ändern. Er würde also *am Raumort der ersten Messung* zur Zeit t_2 folgende Mondkoordinaten messen (Blickrichtung vom 21:17-Ort des Beobachters zur 7:11-Position des Mondes in Abb. 4):

$$(\alpha_2'', \delta_2'') = (\alpha_1 + \Delta\alpha, \delta_1 + \Delta\delta)$$

In diesem Fall berechnet sich der Parallaxenwinkel aus den zeitgleichen Mondpositionen (α_2, δ_2) und (α_2'', δ_2'') aus

$$p = \sqrt{(\alpha_2'' - \alpha_2)^2 \cos^2 \delta_2 + (\delta_2'' - \delta_2)^2} \quad (3)$$

Beide Korrekturen sind äquivalent; sie führen auf denselben Wert des Parallaxenwinkels. Welche der beiden zugrunde liegenden *Argumentationen* man bevorzugt, ist wohl Geschmacksache. In diesem Papier wird im Folgenden die letztere verwendet und mit dem *virtuellen Beobachter* argumentiert.

3 Tipps und Anleitungen für eigene Messungen und Auswertungen

- Der Mond muss im Abstand eines Mondtages (ca. 24h50m), also an zwei aufeinander folgenden Abenden oder Morgen, und zusätzlich ein weiteres Mal etwa in der Mitte des Zeitintervalls, also morgens oder abends, fotografiert werden.

⁴In der Realität wäre das schwierig: Der Beobachter müsste sich mit hoher Geschwindigkeit $v = \omega_E R_E \cos \varphi$, das ist mehr als 1000 km/h, entlang seines Breitenkreises nach Westen bewegen.

- Damit die Basislänge Δ der Parallaxenmessung möglichst groß werden kann, sollte der Mond während der Dunkelheit möglichst lange über dem Horizont sichtbar sein. Das ist bei Vollmond – besonders im Winter – der Fall. Am besten fotografiert man deshalb den **Vollmond in den Wintermonaten** kurz nach Aufgang und kurz vor Untergang.
- Es ist schwierig, den Vollmond so zu fotografieren, dass er auf dem Bild nicht überbelichtet ist, aber trotzdem helle Sterne auf dem Foto zu erkennen sind, relativ zu denen die Position des Mondes gemessen werden kann. Besonders geeignet für solche Fotos sind helle Planeten. Aber es geschieht nur relativ selten, dass der fast volle Mond an hellen Planeten vorbeizieht.

Das Problem kann dadurch überwunden werden, dass zwei Fotos mit **feststehender Kamera** und unveränderter Brennweite unmittelbar nacheinander aufgenommen werden: eins mit sehr kurzer Belichtungszeit, um den Mond richtig zu belichten und seine Position auf dem Foto exakt messbar zu machen, ein weiteres mit langer Belichtungszeit, um Umgebungssterne sicht- und auswertbar zu machen. Die Positionen von Mond und Sternen können anschließend auf den beiden Bildern nacheinander gemessen werden. Anschaulicher ist es, die beiden Digitalbilder mit einem Bildbearbeitungsprogramm zu kombinieren, z. B. durch Differenzbildung (s. Abb. 1).

Entscheidend ist dabei, dass sich die Orientierung der Kamera zwischen den beiden Aufnahmen nicht ändert (z. B. bei der Umstellung der Belichtungszeit) und dass die beiden Aufnahmen so schnell aufeinander folgen, dass die zwischenzeitliche Bewegung des Mondes vernachlässigt werden kann. Beides ist besonders einfach, wenn man die Kamera von einem Laptop aus fernbedienen kann.

- Wenn möglich sollten die Bezugssterne so gewählt werden, dass das von den Sternen und dem Mond gebildete Dreieck sich möglichst wenig von einem gleichseitigen Dreieck unterscheidet.
- Die Pixelkoordinaten der Sterne und des Mondes können mit einem Bildbearbeitungsprogramm (z. B. ImageJ) gemessen werden.
- Die äquatorialen Koordinaten der Bezugssterne – und möglichst weiterer auf dem Bild sichtbarer Sterne – müssen bekannt sein. Man kann sie meistens dem Astronomie- bzw. Planetariumsprogramm entnehmen, mit dessen Hilfe die Sterne auf dem Foto identifiziert wurden.
- Die Umrechnung der Pixelabstände in Winkelabstände und die Ableitung der Mondkoordinaten sind nicht einfach. In den **Anhängen A.1 und A.2** wird ein mögliches Vorgehen detailliert beschrieben. Die Arbeit kann man sich von der Excel-Tabelle **Mondauswertung.xls** abnehmen lassen, in der die entsprechenden Algorithmen implementiert sind und in die man lediglich die eigenen Messwerte übertragen muss.
- **Fokussierung, Auffinden der geeigneten Belichtungszeiten und die Bestimmung der Mondkoordinaten können an Tagen vor der eigentlichen Messung geübt werden!**

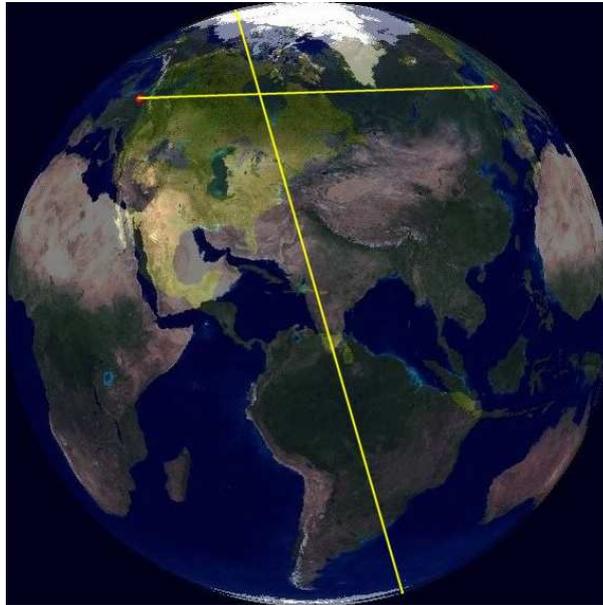


Abbildung 5: Die Positionen des Beobachters um 21:17 und um 7:11 Uhr MEZ relativ zum Mond und ihr (projizierter) Abstand Δ in Beziehung zum Durchmesser der Erde. Die mit HomePlanet berechneten Bilder wurden überlagert.

Während einer Übungsphase ist es sicher sinnvoll, sich die *wahren* Mondkoordinaten berechnen zu lassen und zusätzlich in die Tabelle einzutragen.

4 Ein Beispiel

Die Algorithmen der Auswertung werden im Anhang ausführlich beschrieben.

4.1 Die Bestimmung der Mondpositionen

Der Mond wurde an den Abenden des 26. und 27. Dezember 2015 kurz nach Aufgang und am Morgen des 27. Dezember kurz vor Monduntergang fotografiert. Abbildung 6 zeigt die entsprechenden mit einem Astrometrieprogramm vorab berechneten Mondpositionen. Verwendet wurde eine digitale Spiegelreflexkamera mit einem Weitwinkel-Zoomobjektiv (Filmempfindlichkeit **100 ASA**, Blende **3.5**, Brennweite **$f \approx 11$ mm**). Die Belichtungszeiten betragen **1.6 s** und $\frac{1}{500} - \frac{1}{250}$ s. Abbildung 1 zeigt als typisches Ergebnis das Differenzbild zweier solcher Aufnahmen, in dem sich das Negativ des kurz belichteten Mondes deutlich vom überbelichteten Mond der Langzeitaufnahme abzeichnet.

Auf den Fotos wurden mit ImageJ die Pixelpositionen einiger heller Sterne (insbesondere Capella, Castor, Pollux, Regulus, Rigel und Sirius) und des Mondes ausgemessen. Mit den bekannten (Äquatorial-) Koordinaten der Sterne konnten zunächst ihre Winkelabstände berechnet und durch Vergleich mit ihren Pixelabständen die Brennweite des Objektivs genau bestimmt werden. Dadurch konnte die in den Bilddaten angegebene

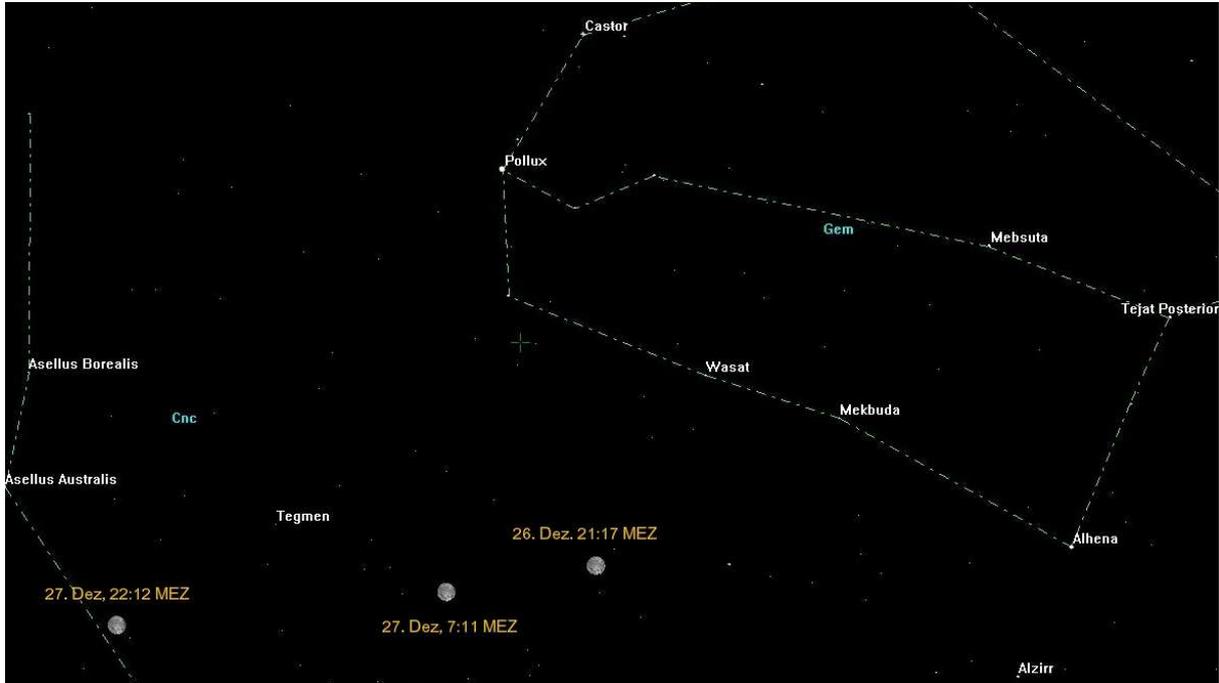


Abbildung 6: Die Positionen des Mondes am Sternenhimmel zu den Zeiten der hier beschriebenen Messungen (erzeugt mit Guide9)

Brennweite von 11.0 mm auf 11.2 mm korrigiert werden. Das Verfahren wird in **Anhang A.1** beschrieben.

Aus den Winkelabständen des Mondes zu den Sternen lassen sich sodann die Koordinaten des Mondes ableiten. Details der Rechnung, die die Excel-Tabelle `Mondauswertung.xls` übernehmen kann, werden in **Anhang A.2** beschrieben.

Aus den drei Aufnahmen ergeben sich die folgenden Positionen des Mondes:

	Datum	Uhrzeit	Δt	Rektaszension	Deklination
1	26. 12. 2015	21:17:11	0.00 h	113.38°	16.67°
2	27. 12. 2015	07:11:16	9.90 h	117.87°	15.84°
3		22:11:54	24.91 h	127.67°	14.57°

4.2 Bestimmung des Parallaxenwinkels

Aus den Positionen 1 und 3 lassen sich, wegen $t_3 - t_1 \approx T_{syn}$ nach den in **Anhang A.3** beschriebenen Verfahren zunächst die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes und dann die vom virtuellen Beobachter zur Zeit t_2 gemessene Mondposition (α_2'', δ_2'') berechnen. Es ergeben sich die folgenden Parallaxenwinkel:

$$\begin{aligned}
 (\alpha_2'', \delta_2'') &= (119.06^\circ, 15.83^\circ) & \implies & p = 1.14^\circ & \text{(nach Methode 1)} \\
 \vec{r}_2'' &= (-0.47, 0.84, 0.27) & \implies & p = 1.18^\circ & \text{(nach Methode 2)}
 \end{aligned}$$

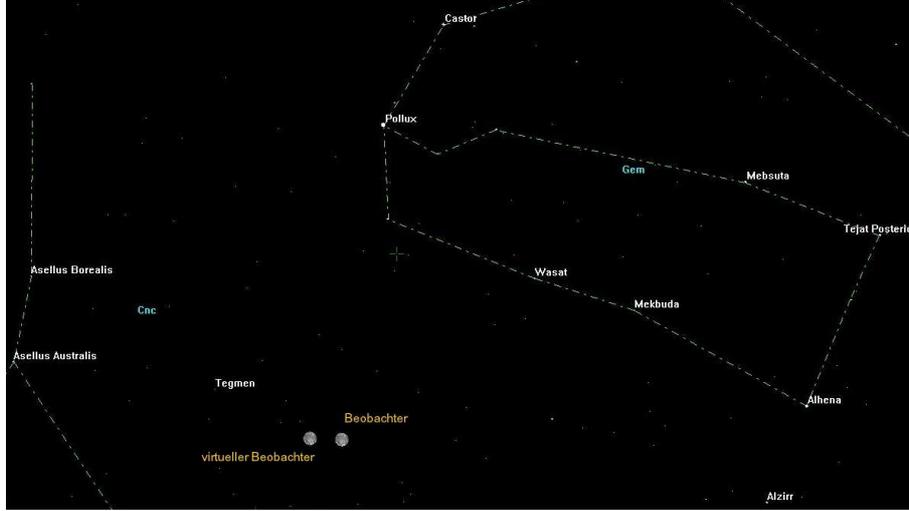


Abbildung 7: Die Größe der gemessenen täglichen Parallaxe des Mondes

Der Parallaxenwinkel ist zwar klein, aber immerhin mehr als doppelt so groß wie der Winkeldurchmesser des Mondes. Abbildung 7 veranschaulicht die Größe des Effektes durch Simulation der Überlagerung der Fotos von Beobachter 2 (bei dem es sich um dieselbe Person wie bei Beobachter 1 handelt!) und des virtuellen Beobachters.

4.3 Die Entfernung des Mondes

Die geografische Position, an der die Beobachtungen durchgeführt wurden, ist $(\varphi, \lambda) = (48.93^\circ, 8.95^\circ)$. Der „Beobachtungsort“ des virtuellen Beobachters hat dieselbe geografische Breite. Seine geografische Länge λ_{vB} ist jedoch kleiner, weil sich die Erde in der Zeit $t_2 - t_1$ unter ihm nach Osten weggedreht hat. Sie beträgt demnach

$$\lambda_{vB} = \lambda_1 - \frac{360^\circ}{23h56m}(t_2 - t_1) = -139.98^\circ. \quad (4)$$

Der lineare Abstand der beiden Orte lässt sich nun leicht berechnen – entweder auf ihrer unterschiedlichen Länge auf demselben Breitenkreis oder aus den entsprechenden kartesischen Ortskoordinaten. Er beträgt

$$\Delta = 1.27R_E \quad (R_E = \text{Erdradius}) \quad (5)$$

Nimmt man vereinfachend an, dass die Verbindungslinie der beiden Orte senkrecht auf der Richtung zum Mond steht, ergibt sich daraus ein Näherungswert für die Mondentfernung d (s. **Anhang A.5**):

$$d = \frac{\Delta}{p} = 63.4RE \quad (\text{nach Methode 1}) \quad (6)$$

$$= 61.4RE \quad (\text{nach Methode 2}) \quad (7)$$

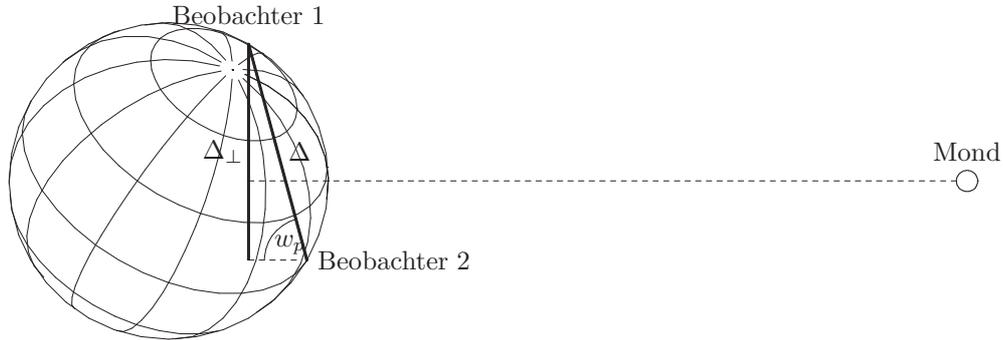


Abbildung 8: Für die Bestimmung der Mondparallaxe kommt es nicht auf den Abstand Δ der beiden Beobachter an, sondern auf dessen Projektion Δ_{\perp} parallel zur Richtung zum Mond.

Für die Entfernungsbestimmung kommt es jedoch nicht auf den Abstand Δ an, sondern auf seine Projektion Δ_{\perp} parallel zu Richtung zum Mond (Abb. 8, siehe auch Abb. 5). Um den Winkel zwischen der Verbindungslinie zwischen den Beobachtungsorten und der Richtung zum Mond berechnen zu können, müssen auch die Ortsvektoren der Beobachter als Äquatorialkoordinaten beschrieben werden. Dazu mache man sich klar:

- Die Deklination δ eines Ortes auf der Erde ist gleich seiner geografischen Breite φ .
- Die Rektaszension α eines Ortes auf der Erde ändert sich im Laufe eines Sterntages (23h56m) um 360° . Zu jeder Zeit stimmt sie überein mit der lokalen Sternzeit θ an diesem Ort.

Die Sternzeiten kann man sich mit irgendeinem Programm⁵ berechnen lassen. Sie betragen für die beiden Orte am 27. Dezember um 7:11:16 MEZ

$$\theta_1 = 13 : 08 : 46 = 197.2^{\circ} \text{ und } \theta_2 = 3 : 13 : 03 = 48.3^{\circ}.$$

Damit ergeben sich der Projektionswinkel w_p und der projizierte Abstand Δ_{\perp} der beiden Orte zu

$$w_p = 85.3^{\circ} \implies \Delta_{\perp} = 1.26R_E. \quad (8)$$

= Daraus ergibt sich nur eine kleine Korrektur an der Mondentfernung:

$$d = \frac{\Delta_{\perp}}{p} = 63.0RE \text{ (nach Methode 1)} \quad (9)$$

$$= 61.1RE \text{ (nach Methode 2)} \quad (10)$$

Diese Entfernung könnte noch mit dem Abstand der Verbindungslinie vom Erdmittelpunkt korrigiert werden.

⁵Ich berechne sie mit dem kleinen selbst geschriebenen Programm `PlanetenDelphi`, mit dem sich auch genaue Mond- und Planetenkoordinaten berechnen lassen.

Die genaueste Methode zur Berechnung der Mondentfernung beruht auf einfacher Vektorrechnung (s. **Anhang A.5.2**). Damit ergibt sich schließlich die Mondentfernung zu

$$d = 63.5R_E = 404000km \text{ (nach Methode 1)} \quad (11)$$

$$= 61.4R_E = 391000km \text{ (nach Methode 2)} \quad (12)$$

Vergleicht man diese Werte mit dem wahren Wert der Mondentfernung zum Zeitpunkt der Messung ($60.2R_E = 383000km$), dann kann ich mit dem Erfolg dieser ersten Beispielmessung sehr zufrieden sein! Die Abweichung des Messwertes vom wahren Wert der Mondentfernung dürfte hauptsächlich darauf beruhen, dass die Annahme einer gleichförmigen Mondbewegung im Zeitintervall nur schlecht erfüllt ist: Tatsächlich nahm die Winkelgeschwindigkeit im gesamten Zeitintervall ab⁶.

5 Fazit

Auch die Messung der täglichen Parallaxe des Mondes verfügt über einen gewissen Erlebnischarakter (stabiles Wetter über zwei aufeinander folgende Nächte, Aufsuchen eines geeigneten, evtl. weit von zuhause entfernten Beobachtungsortes, ...), dieser ist aber deutlich weniger ausgeprägt als bei der Parallaxenmessung durch weit voneinander entfernte Beobachter (siehe z. B. [2] und [3]), Dafür aber stellt sie wohl in den meisten Fälle eine realistischere Möglichkeit dar, zu einem *eigenen Messwert* für die Mondentfernung zu kommen. Zwar ist, wie ich hoffe deutlich gemacht zu haben, auch bei dieser Messung eine genaue Planung erforderlich. Die „Absprachen“ mit sich selbst sind aber doch deutlich einfacher als mit einer Gruppe über die Erde verteilter Beobachter, die häufig nicht genau zuhören bzw. lesen und Messvorbereitungen oft für überflüssig halten.

Bei der hier beschriebenen Messung handelt es sich um eine erste Erprobung des Messverfahrens. Sie sollte auf jeden Fall noch mehrmals wiederholt werden, um Erfahrungen mit den praktischen Problemen zu sammeln und die Genauigkeit der Ergebnisse besser abzuschätzen zu können.

Die entscheidenden Messgrößen sind die Winkelabstände des Mondes zu hellen Sternen zu drei verschiedenen Zeiten. Für die Messung von Winkelabständen gibt es aber ein professionelles Gerät: den Sextanten.

Die Messung der täglichen Parallaxe des Mondes sollte sich mit noch geringerem Aufwand mit einem Sextanten durchführen lassen!

Eine erste Winkelmessung an Mond, Sirius und Procyon am 21. Januar 2016 um 1:22 MEZ ergab eine Mondposition, die sich um 0.26° von der wahren Position unterschied. Mit mehr Übung und einem kleineren Abstand zwischen den beiden Winkelmessungen lässt sich hoffentlich noch eine größere Genauigkeit erzielen.

⁶Der Mond durchlief am 21. Dezember das Perigäum (Erdsnähe) und am 2. Januar das Apogäum (Erdferne).

Literatur

- [1] Backhaus, U.: *Über die Bewegungen des Mondes*, Vorträge der DPG 1999 in Ludwigsburg
- [2] Backhaus, U.: *Simultaneously Observing and Photographing the Moon*, Vorträge der DPG 2001 in Bremen
(Internetseite des Projektes: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/moonproject.htm>)
- [3] Backhaus, U.: *Die Größe der Erde und die Entfernung des Mondes. Anregungen zur astronomischen Zusammenarbeit zwischen Schulen*. Praxis der Naturwissenschaften/Physik 62/8, 18 (2013)
(Internetseite des Projektes: <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/IYA2009/IYA2009-MoonsParallax.html>)
- [4] Burger, W., Burge, M. J.: *Digitale Bildverarbeitung. Eine Einführung mit Java und ImageJ*, Springer: Berlin usw. 2006
- [5] Montenbruck, O.: *Astronomie mit dem Personalcomputer*, Springer: Berlin usw. 1989

A Anhang: Mathematische Details

A.1 Winkelmessungen auf Digitalfotos

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass das Objektiv eine ideale Lochkameraabbildung des Sternenhimmels auf dem CCD-Chip erzeugt. Zusätzliche Abbildungsfehler des Objektivs erfordern die Berechnung von *Plattenkonstanten*. Damit habe ich mich noch nicht befasst ([5] und [4]).

- Im Fall großer Brennweiten kann eine lineare Beziehung zwischen den Entfernungen in Pixeln und in Grad angenommen werden:
 - Wähle zwei Referenzsterne mit bekannten Himmelskoordinaten (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) und miss ihre Pixelkoordinaten (x_1, y_1) and (x_2, y_2) .
 - Der Winkelabstand w dieser Sterne kann dann mit der folgenden Gleichung berechnet werden (Seitenkosinussatz):

$$w = \arccos(\sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)) \quad (13)$$

- Ihr in Pixeln gemessener Abstand ist natürlich

$$dp = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (14)$$

- Der Maßstab auf dem ganzen Photo ist deshalb:

$$M = \frac{w}{dp} \quad (15)$$

- Im Fall einer kurzen Brennweite variiert der Maßstab auf dem Bild, und die Bestimmung von Winkelabständen ist etwas komplizierter:
 - Die Kantenlänge der Pixel (**Massstab = 0.0043mm⁷**) und ihre Anzahlen in beiden Richtungen ($\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y$) = (5184, 3456) müssen bekannt sein.
 - Mit einem Näherungswert für die Brennweite f_0 des Objektivs kann der Winkelabstand w_0 der Referenzsterne bestimmt werden, indem zunächst ihre „Azimutwinkel“ A_i und ihre „Höhenwinkel“ h_i berechnet werden:

$$A_i = \arctan 2(x_i, y_i) \quad (16)$$

$$h_i = \arctan \frac{f_0}{\sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2}} \text{ mit } (x_m, y_m) = (2592, 1728) \quad (17)$$

$$w_0 = \arccos(\sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos(A_1 - A_2)) \quad (18)$$

- Schließlich kann der Näherungswert für die Brennweite zu f verbessert werden, indem w_0 an den wahren Winkelabstand w der Sterne angepasst wird.

A.2 Die äquatorialen Koordinaten des Mondes

Eigentlich muss es sich hier um ein Standardproblem der sphärischen Astronomie handeln. Aber ich habe bis jetzt keine geschlossene Lösung dafür gefunden.

- Wähle zwei Referenzsterne S_1 und S_2 aus, die voneinander den Winkelabstand w_{12} haben.
- Miss die Pixelabstände des Mondes zu diesen Sternen und berechne die zugehörigen Winkelabstände w_i . Die Sterne und der Mond bilden ein sphärisches Dreieck $S_1 S_2 M$ mit bekannten Seitenlängen.
- Die Mondposition muss einen der Schnittpunkte zwischen zwei Kreisen auf der Himmelskugel bilden. Jeder dieser Kreise ist Schnittkreis zwischen der Kugel und einer Ebene, die folgendermaßen festgelegt ist: Der Ortsvektoren des entsprechenden Sterns S_i steht senkrecht auf der Ebene. und ihr Abstand vom Ursprung ist $\cos w_i$ (s. Abbildung 9).
- Seien \vec{r}_i die rechtwinkligen äquatorialen Ortvektoren der beiden Referenzsterne,

$$\vec{r}_i = (\cos \alpha_i \cos \delta_i, \sin \alpha_i \cos \delta_i, \sin \delta_i),$$

dann sind die Normalformen der Schnittebenen⁸

$$\vec{r}_i \cdot \vec{r} = d_i \text{ mit } d_i = \cos w_i.$$

⁷Die Zahlenangaben geben die in `taeglMondparallaxe.xls` voreingestellten Daten der Kamera an, die für die Beispielmessung verwendet wurde.

⁸Die folgenden Gleichungen habe ich aus Wikipedia, da ich in Ney keine Formelsammlungen habe.

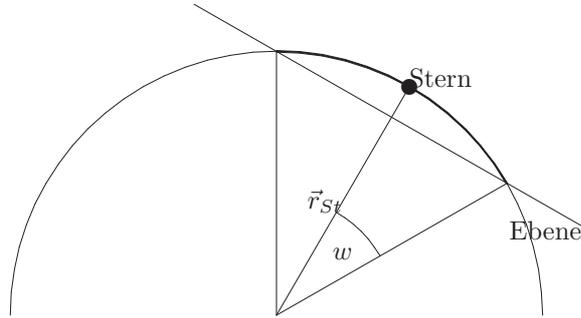


Abbildung 9: Alle Punkte auf der Einheitskugel, die denselben Winkelabstand w von einem Stern haben, bilden einen Kreis auf der Kugel. Dieser Kreis ist der Schnittkreis der Kugel mit einer Ebene.

Gesucht ist zunächst die Parameterdarstellung der Schnittgeraden \vec{g} der beiden Ebenen:

$$\vec{g}: \vec{r} = \vec{q} + t\vec{w}$$

- Der Richtungsvektor \vec{w} ist

$$\vec{w} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (r_{1y}r_{2z} - r_{1z}r_{2y}, r_{1z}r_{2x} - r_{1x}r_{2z}, r_{1x}r_{2y} - r_{1y}r_{2x}).$$

- Der Stützvektor \vec{q} kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{q} = \frac{d_1 r_1^2 - d_2 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \vec{r}_1 + \frac{d_2 r_1^2 - d_1 (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \vec{r}_2$$

Da die \vec{r}_i Einheitsvektoren sind, kann man diese Beziehung folgendermaßen vereinfachen:

$$\vec{q} = \frac{\cos w_1 - \cos w_2 \cos w_{12}}{\sin^2 w_{12}} \vec{r}_1 + \frac{\cos w_2 - \cos w_1 \cos w_{12}}{\sin^2 w_{12}}$$

- Gesucht sind nun die Schnittpunkte \vec{s}_i dieser Geraden mit der Einheitskugel, d. h. zwei Parameter t_i , für die gilt:

$$\vec{s}_i = \vec{q} + t_i \vec{w} \text{ mit } s_i^2 = 1.$$

Das ist aber eine quadratische Gleichung für t :

$$\begin{aligned} (q_1 + tw_1)^2 + (q_2 + tw_2)^2 + (q_3 + tw_3)^2 &= 1 \implies \\ (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) t^2 + 2(q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3) t + (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1) &= 0 \implies \\ \text{oder: } At^2 + Bt + C &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$t_1 = -\frac{B}{2A} + \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C} \text{ und } t_2 = -\frac{B}{2A} - \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - C}$$

- Rechnet man die kartesischen Koordinaten \vec{s}_i in die entsprechenden sphärischen Koordinaten (α_i, δ_i) um, ist in der Regel leicht zu erkennen, welche der beiden Lösungen die richtige ist.

Dieser Algorithmus ist auf dem Tabellenblatt `Positionsberechnung` der Excel-Tabelle `Mondauswertung.xls` implementiert.

A.3 Interpolation der Eigenbewegung des Mondes

Wenn man die Position des Mondes zweimal im Abstand Δt etwa eines Mondtages misst, (α_1, δ_1) und (α_2, δ_2) , ist die Positionsveränderung nicht durch einen Parallaxeneffekt verfälscht, und die mittlere Bewegung kann berechnet werden:

Methode 1 Nimmt man die Mondbewegung in Rektaszensions- und Deklinationsrichtung als gleichförmig an⁹, dann lassen sich Zwischenpositionen $(\alpha(t), \delta(t))$ leicht interpolieren:

$$\alpha(t) = \alpha_1 + \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}(t - t_1) \text{ und } \delta(t) = \delta_1 + \frac{\Delta\delta}{\Delta t}(t - t_1) \quad (19)$$

Methode 2 Will man den nichtlinearen Charakter der sphärischen Koordinaten und die Schiefelage der Mondbahn berücksichtigen, ist die Interpolation etwas schwieriger:

1. Man nimmt an, dass der Mond *in seiner Bahnebene* eine gleichförmige Kreisbewegung vollführt.
2. Den (Einheits-) Normalenvektor \vec{n} dieser Ebene erhält man aus den beiden gemessenen Mondpositionen \vec{r}_i :

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

3. Den zweiten Einheitsvektor \vec{e}_2 , der $\vec{e}_1 = \vec{r}_1$ zu einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Bahnebene ergänzt, erhält man aus

$$\vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{r}_1$$

4. Der während der Zeitspanne Δt insgesamt vom Mond überstrichene Winkel $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ ergibt sich aus

$$\Delta\varphi = \arccos(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2).$$

5. Nimmt man nun an, dass der Mond die Erde während des betrachteten Mondtages gleichförmig umläuft, dann hat er zu einem beliebigen Zwischenzeitpunkt t den Winkel

$$\varphi(t) = \varphi_1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}(t - t_1)$$

überstrichen. Sein Ortvektor $\vec{r}(t)$ ist demnach

$$\vec{r}(t) = \cos \varphi(t) \vec{e}_1 + \sin \varphi(t) \vec{e}_2. \quad (20)$$

⁹siehe Fußnote 2

Beide Rechnungen sind im Tabellenblatt `Interpolation` umgesetzt. So kann geprüft werden, ob zwischen den Ergebnissen der beiden Rechnungen ein relevanter Unterschied besteht.

A.4 Bestimmung des Parallaxenwinkels

Die Positionen 1 und 3 zeigen die reine, parallaxenfreie, Eigenbewegung des Mondes. Aus ihnen lässt sich die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes berechnen:

1. Mit Methode 1 ergibt sich die Mondposition, die der virtuelle Beobachter am Raumort der ersten Messung zur Zeit t_2 messen würde, mit Gleichung (19) zu

$$\alpha_2'' = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1), \quad \delta_2'' = \frac{\delta_3 - \delta_1}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1). \quad (21)$$

Der Parallaxenwinkel ist der Winkel zwischen den von Beobachter 2 und vom virtuellen Beobachter gleichzeitig gemessenen Mondpositionen, also

$$p = \sqrt{((\alpha_2'' - \alpha_2) \cos \delta)^2 + (\delta_2'' - \delta_2)^2} \quad (22)$$

2. Aus der Winkelgeschwindigkeit in der Bahnebene ergibt sich mit Methode 2 (Anhang A.3) gemäß Gleichung (20) für die Messung des virtuellen Beobachters

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) &= \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} t_2 \\ \vec{r}_2'' &= \cos \varphi(t_2) \vec{e}_1 + \sin \varphi(t_2) \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (23)$$

und damit der Parallaxenwinkel p als Winkel zwischen den Vektoren \vec{r}_2 und \vec{r}_2'' :

$$p = \arccos(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2'') \quad (24)$$

A.5 Ableitung der Mondentfernung aus der Parallaxenmessung

Sind die geografischen Koordinaten (φ_i, λ_i) der beiden Orte bekannt, an denen die Messungen am Mond vorgenommen wurden, aus denen der Parallaxenwinkel p berechnet wurde, lässt sich die Mondentfernung auf folgende zwei Weisen ableiten, nachdem der lineare Abstand Δ zwischen den Beobachtungsorten aus den entsprechenden kartesischen Koordinaten \vec{r}_i berechnet worden ist:

$$\Delta = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (25)$$

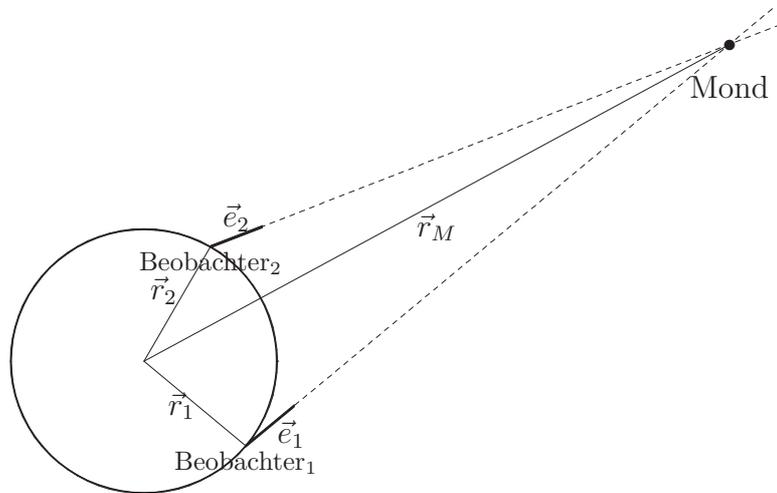


Abbildung 10: Zur Berechnung des Schnittpunktes der beiden Sichtlinien

A.5.1 Anschauliche Methode

Nimmt man zunächst vereinfachend an, dass der Verbindungsvektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ der Beobachtungsorte senkrecht auf der Richtung zum Mond steht, lässt sich die Mondentfernung d näherungsweise nach Gleichung (1) berechnen:

$$d = \frac{\Delta}{p}$$

Bei einem anderen Winkel zwischen dem Verbindungsvektor und der Richtung \vec{r}_M zum Mond kommt es nur auf den projizierten Abstand Δ_{\perp} an:

$$d = \frac{\Delta_{\perp}}{p} = \frac{\Delta \sin w_p}{p} \text{ mit } w_p = \arccos\left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \vec{r}_M\right) \quad (26)$$

Gegebenenfalls kann das Ergebnis zusätzlich um den Abstand der Verbindungslinie der beiden Orte vom Erdmittelpunkt korrigiert werden.

A.5.2 Exakte Methode

Wenn \vec{r}_i die kartesischen Ortsvektoren der Beobachter sind und \vec{e}_i die Richtungen, in der sie den Mond sehen, dann muss sich der Mond irgendwo auf den Geraden befinden, die durch

$$\vec{r}_i + \nu \vec{e}_i, \quad \nu > 0$$

beschrieben werden können. Wenn die Beobachter den Mond gleichzeitig anvisieren, dann muss sich der Mond am Schnittpunkt der beiden Sichtlinien befinden. Es muss also gelten:

$$\vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_1 = \vec{r}_2 + \mu \vec{e}_2, \quad \lambda, \mu > 0$$

Das sind drei Gleichungen mit nur zwei zu bestimmenden Unbekannten λ und μ ! Anders als in einer Ebene werden sich die beiden Geraden nur bei exakten Messungen schneiden. Andernfalls verfehlen sie einander („windschiefe Geraden“). Wegen immer auftretender Messfehler wird also obiges Gleichungssystem niemals lösbar sein.

Aus diesem Grunde sind wir gezwungen, statt des Schnittpunktes die Stelle der größten Annäherung zwischen den beiden Geraden zu berechnen. Das heißt, wir suchen nach zwei Punkten $\vec{P}_1 = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_1$ und $\vec{P}_2 = \vec{r}_2 + \mu_2 \vec{e}_2$ auf den Geraden, deren Verbindungsvektor senkrecht auf beiden Geraden steht:

$$\begin{aligned}(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_1 &= 0, \\(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{e}_2 &= 0\end{aligned}$$

Das ist ein System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten λ_1 und μ_2 . Eine einfache Umformung führt auf die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \mu_2 &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)}{1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}, \\ \lambda_1 - \mu_2 &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2},\end{aligned}$$

aus denen die gesuchten Parameter leicht zu berechnen sind:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}((\lambda_1 + \mu_2) + (\lambda_1 - \mu_2)), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}((\lambda_1 + \mu_2) - (\lambda_1 - \mu_2))\end{aligned}$$

Die Entfernung des Mondes ergibt sich dann schließlich zu

$$r_M \approx |\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_1| \approx |\vec{r}_2 + \mu_2 \vec{e}_2| \quad (27)$$

Als Maß für die Genauigkeit des Ergebnisses kann man den Minimalabstand $|\vec{P}_1 - \vec{P}_2|$ der beiden Sichtlinien nehmen.

Dieser Algorithmus ist im Tabellenblatt `korr.Parallaxenrechnung von Mondauswertung.xls` implementiert.

A.6 Vergleich der beiden Interpolationsmethoden mit den wahren Parallaxenwerten

Die Interpretation der Parallaxenmessung als simultane Messung mit einem virtuellen Beobachter hat den Vorteil, dass man präzise virtuelle Beobachtungsdaten berechnen kann, weil Uhrzeiten und die jeweiligen Positionen des virtuellen Beobachters bekannt sind.

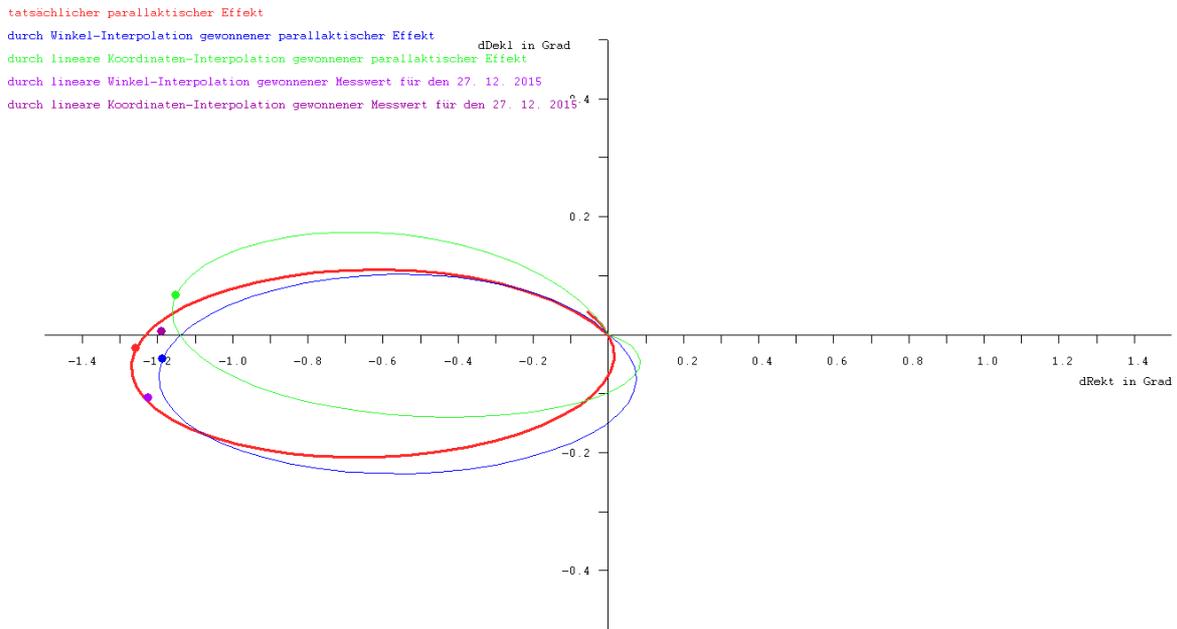


Abbildung 11: Vergleich der beiden Interpolationsmethoden mit berechneten Positionsdaten. Eingetragen sind zusätzlich die Ergebnisse der hier beschriebenen Messung

In Abbildung 11¹⁰ zeigen entsprechende für das ganze Messintervall berechnete Änderungen in Rektaszension und Deklination die erwartete parallaktische Ellipse, die durch die „Reise“ des Beobachters entlang seines Breitenkreises zustande kommt. Die Abbildung zeigt auch die Werte die sich nach den Interpolationsmethoden 1 und 2 aus *berechneten* Mondpositionen für t_1 und t_3 ergeben. Es zeigt sich, dass – zumindest an diesem Tag – Methode 2 besser mit den wahren Werten übereinstimmt.

¹⁰erzeugt mit dem Programm `taeglMondparallaxe.exe`, mit dem auch andere Messungen ausgewertet werden können