

Anleitung zur Erstellung von O-C-Diagrammen mit Hilfe der Excel-Tabelle „EclipsesExample.xls“

U. Backhaus

1 Einleitung

Ziel des Planetfinders-Projekts ist es, anhand gemessener Verfinsterungszeitpunkte Abweichungen von der Periodizität festzustellen, um evtl. auf die Existenz eines oder mehrerer Planeten schließen zu können, die das Doppelsternsystem umkreisen. Dazu werden zunächst die zeitlichen Mitten der Verfinsterungen möglichst genau gemessen und ihre Fehler bestimmt (mit `DoppelsternBeispiel.xls` und `Modellfit.exe`). Versucht man, an diese Messwerte mit den in unserer „candidates“-Liste angegebenen Näherungswerten für Bezugszeitpunkt und Periode, eine lineare Ephemeride anzupassen, d. h. eine konstante zugrunde liegende Periode zu finden, stellt man zunächst Abweichungen von etwa ± 8 min fest, die sich mit einer Periode von einem Jahr wiederholen. Diese Abweichungen beruhen auf dem Umlauf der Erde um die Sonne, durch den sich der Abstand zum interessierenden Objekt periodisch ändert.

Dieser Effekt muss eliminiert werden, bevor nach Abweichungen in der Größenordnung weniger Sekunden gesucht werden kann. Dazu werden die Beobachtungsdaten auf das Gravitationszentrum des Sonnensystems reduziert. Legt man einen gleichförmigen kreisförmigen Umlauf der Erde um die Sonne zugrunde, kann diese Reduktion mit elementaren Mitteln selbst durchgeführt werden. Das geschieht auf dem Tabellenblatt `Calculation`.

Die so zu erhaltene Korrektur ist aber nicht genau genug. Die Reduktion wird deshalb mit einem professionellen Tool im Internet („Online Astronomy Utilities“) durchgeführt. An die so reduzierten Messdaten kann mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine Gerade angepasst werden, deren Parameter der Bezugszeitpunkt und die Periode der Verfinsterungen sind. Mit diesen Parametern lässt sich berechnen, zu welchen (reduzierten) Zeitpunkten Verfinsterungen erwartet werden.

Die Differenzen zwischen den auf das Gravitationszentrum reduzierten Beobachtungsdaten (**Observed data**, Spalte J in Tabellenblatt `Measures`) und den so berechneten Zeitpunkten (**Calculated data**) stellen die gesuchten Abweichungen von der Periodizität dar.

2 Bedienungsanleitung

In der Tabelle werden die in der Einleitung umrissenen Berechnungen am Beispiel von CSS080502 durchgeführt. Mit den folgenden Schritten können mit ihr O-C-Diagramme anderer Objekte erzeugt werden:

1. Speichere die Tabelle „EclipsesExample.xls“ unter einem neuen Namen ab (z. B. „EclipsesCSS06653.xls“).
2. Trage im Tabellenblatt „Measures“ in die Zellen C2-C7 Name und Position des zu untersuchenden Objekts und Näherungswerte für Bezugszeitpunkt¹ und Periode ein. Diese Werte können aus „candidates.xls“ übernommen werden.
3. Trage in Spalte D ab Zelle D10 die aus den beobachteten Verfinsterungskurven abgeleiteten Verfinsterungsmitten (**jd (observed)**) und in Spalte E die zugehörigen Fehler (**error (d)**) ein². Diese Daten können z. B. den entsprechenden Ephemeris-

¹ Um das mit Copy and Paste tun zu können, müssen die verbundenen Zellen C6 und D6 zunächst wieder getrennt und nach Kopieren des T(BEJD)-Wertes wieder verbunden werden.

² Aus den Verfinsterungsdaten werden in Spalte H mit Hilfe der Näherungswerte für Bezugszeitpunkt und Periode die Anzahlen der zugehörigen Zyklen berechnet.

Tabellen auf unserer moodle-Seite (z. B. „EphemerisCSS06653_2013-04-16.txt“) oder dem kompletten Archiv entnommen werden.

4. Zur Berechnung der auf das Baryzentrum reduzierten Verfinsterungszeitpunkte (Barycentric Julian Date) rufe die entsprechende Seite der [Online Astronomy Utilities](#) auf. Die url ist auch auf dem Tabellenblatt „Measures“ angegeben. Auf der Seite führe folgende Schritte durch:
 - a. Trage die Werte für Rektaszension (z. B. „13 29 25.21“) und Deklination (z. B. „+12 30 25.4“) des Objektes ein.
 - b. Wähle als Earth-based Observatory das „McDonald Observatory“ aus.
 - c. Kopiere die jd(observed)-Daten in das UTCs-Feld und sende die Daten ab. Die Tabelle ist z. Z. für maximal 200 Messwerte ausgelegt. Das sollte fürs Erste reichen.
 - d. Kopiere die berechneten BJD_TDB-Werte (Inhalte einfügen – als Text) in Spalte J des Tabellenblatts „Measures“ (unter **jdkorr(with astroutils)**).
5. Ändere den Diagrammtitel auf Tabellenblatt „o-c-diagram“ und ändere die Datenquelle der Diagrammpunkte entsprechend der Anzahl der Beobachtungen ab.
6. Speichere die Tabelle erneut ab.

Nach diesen Schritten sollte das Tabellenblatt „o-c-diagram“ das zu erzeugende O-C-Diagramm enthalten. Das Diagramm auf Tabellenblatt „deltat-diagram“ zeigt die Abweichung der beobachteten Verfinsterungszeitpunkte von der linearen Ephemeride.

3 Optimierung der Objekt-Ephemeriden

Gegeben sind die reduzierten Verfinsterungszeitpunkte t_i mit ihren Fehlern σ_i und die Nummern der zugehörigen Zyklen n_i . Diese Werte sollen an eine lineare Ephemeride angepasst werden, d. h. an eine Gerade der Form

$$t_i = t_0 + pn_i \quad (1.1)$$

Dabei handelt es sich um ein Standardproblem der linearen Optimierung, dessen Lösung in vielen Büchern zu finden ist. Ich habe die Numerical Recipes³ verwendet, in dem die Geradengleichung folgendermaßen geschrieben ist:

$$y(x) = a + bx \quad (1.2)$$

Das Problem wird dadurch gelöst, dass das Minimum der χ^2 -Funktion

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (1.3)$$

bestimmt wird, indem die partiellen Ableitungen gleich null gesetzt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i^2} \\ 0 &= \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i (y_i - a - bx_i)}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Diese Bedingungen können mit den folgenden Definitionen⁴

$$S \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}, S_x \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}, S_y \equiv \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}, S_{xx} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, S_{xy} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad (1.5)$$

in die folgende Form gebracht werden:

³ W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press 1986

⁴ Der Zusammenhang dieser Ausdrücke mit den von Sebastian Bauer am 4. 5. 2013 verwendeten ist $A=-2S_{xy}, B=2S_x, C=2S_{xx}, D=-2S_y, E=2S$.

$$\begin{aligned} aS + bS_x &= S_y \\ aS_x + bS_{xx} &= S_{xy} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems kann analytisch berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Delta &= SS_{xx} - (S_x)^2 \\ a &= \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{\Delta} \\ b &= \frac{SS_{xy} - S_xS_y}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Die Fehler der Parameter ergeben sich zu

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{S_{xx}}{\Delta}}, \sigma_b = \sqrt{\frac{S}{\Delta}} \quad (1.8)$$

Diese Berechnungen werden auf Tabellenblatt „Ephemeris“ durchgeführt. Die Ergebnisse werden mit roter Schrift auf „Measures“ dargestellt.

4 Elementare O-C-Berechnung

Die Berechnung erfolgt auf Tabellenblatt „Calculation“ in folgenden Schritten:

1. Berechnung der geozentrisch ekliptikalen Länge der Sonne gemäß⁵

$$l_{Sun} = (jd - jd_{Spring}) \frac{360^\circ}{365.25d} \quad (1.9)$$

2. Berechnung der durch den Erdumlauf verursachten Veränderung der Lichtlaufzeit mit der Funktion corr(jd, jdSpr, xStr, ySt). Der Effekt ist proportional zum Kosinus des Winkels α zwischen den Richtungen zu Stern und Sonne⁶. In der Funktion corr wird eine Lichtlaufzeit von 499s für die Astronomische Einheit angenommen. Deshalb beträgt der Effekt $499s \cdot \cos\alpha$. Dabei wird der Kosinus aus den rechtwinkligen Koordinaten von Stern und Sonne berechnet.
3. Der so berechnete Effekt wird auf Tabellenblatt „deltat-diagram“ zusammen mit den Differenzen zwischen den gemessenen Zeiten und ihrer linearen Extrapolation über der seit dem Referenzdatum verstrichenen Zeit grafisch dargestellt.

⁵ Die Visual-Basic-Funktion lSun wird lediglich definiert, um die ekliptikale Länge der Sonne auf das Intervall (0,360°) zu begrenzen.

⁶ Siehe die Praktikumsaufgabe „[DP Leonis und die Lichtgeschwindigkeit](#)“