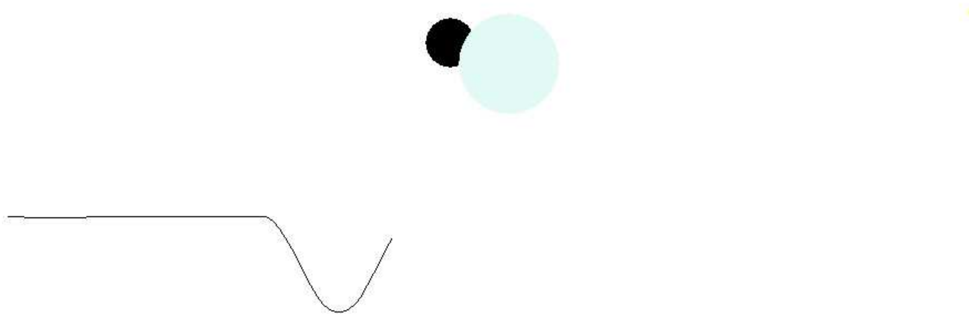
Berechnung der Helligkeit von Bedeckungsveränderlichen

U. Backhaus*



Mit dem Programm `PlanetFinders` erzeugtes Beispielbild[1]

1 Einleitung

Im Projekt **Planet Finders** [1] werden mit den **Monet**-Teleskopen sich gegenseitig bedeckende Doppelsterne beobachtet mit dem Ziel, ihre Periode möglichst auf einige Sekunden genau zu messen. Dazu werden auf Bildserien die Verfinsterungsvorgänge der interessierenden Objekte photometrisch gemessen. Als Verfinsterungszeitpunkt wird die Mitte des symmetrischen Helligkeitsminimums genommen. Um diesen Zeitpunkt trotz Messfehlern und einer Breite von mehreren Minuten sekundengenau bestimmen zu können, wird an die Messwerte eine theoretische Kurve angepasst, von deren zahlreichen Parametern einer der zu messende Zeitpunkt ist. Ziel dieser Messungen ist es, durch Aufspüren periodischer Änderungen der Periode Hinweise auf Planeten zu finden, die das Doppelsternsystem umkreisen. Der Einfluss eines Planeten auf die Periode und sein Aufspüren werden in einem anderen Papier beschrieben.

In diesem Papier wird das einfache Modell zweier sich gegenseitig bedeckenden Sterne entwickelt. Dabei wird vereinfachende davon ausgegangen, dass die Sternscheiben eine konstante Flächenhelligkeit besitzen. Es wird der zugrunde liegende Algorithmus beschrieben, auf dem ein kleines Simulationsprogramm beruht und der in einer `Excel`-Tabelle implementiert ist, mit dem das Modell an Messkurven angepasst werden kann.

2 Der Algorithmus

Es wird angenommen, dass

*Die aktuelle Version dieses Papier kann im Internet unter gefunden werden: `http://www.astronomie-und-internet.de/pf/Doppelstern.pdf`

[1] Um Druckerfarbe zu sparen, wurde das Bild invertiert.

- der Primärstern P kleiner als der Sekundärstern S ist und
- der Primärstern vom Sekundärstern bedeckt wird.

Die Fallunterscheidungen für die anderen Fälle müssen ggf. später hinzugefügt werden (s. S. 8).
Gegeben sind die folgenden Parameter:

1. die von Primär- und Sekundärstern erzeugten Energieströme $\boldsymbol{F_p}$ und $\boldsymbol{F_s}$,
2. die (Winkel-) Radien der Sterne $\boldsymbol{R_p}$ und $\boldsymbol{R_s}$,
3. der (Winkel-) Abstand der beiden Mittelpunkte $\boldsymbol{r}$,
4. der „Stoßparameter“ $\boldsymbol{p}$,
5. die (Winkel-) Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, mit der sich der Primärstern relativ zum Sekundärstern bewegt
6. der Zeitpunkt $\boldsymbol{t_0}$ der Bedeckungsmitte,
7. die Steigung $\boldsymbol{m}$ einer als linear und
8. die Öffnung $\boldsymbol{a}$ einer als quadratisch angenommenen überlagerten Helligkeitsänderung $\boldsymbol{\Delta F}^2$.

Die Geschwindigkeit kann ersetzt werden durch

5. die Gesamtdauer $\boldsymbol{\Delta t_E}$ der Verfinsterung (s. Gleichung (21)),

im Fall vollständiger Bedeckung ($p < R_s - R_p$) der Stoßparameter durch

4. die Dauer der „Totalität“ $\boldsymbol{\Delta t_D}$ (s. Gleichung (23)).

Fall 1 $r \geq R_p + R_s$

Dann findet keine Bedeckung statt und der Gesamtfluss F ist

$$F = F_p + F_s \tag{1}$$

Fall 2 $r \leq R_s - R_p$

Dann ist der Primärstern völlig verdeckt („Totalität“) und der Gesamtfluss ist

$$F = F_s \tag{2}$$

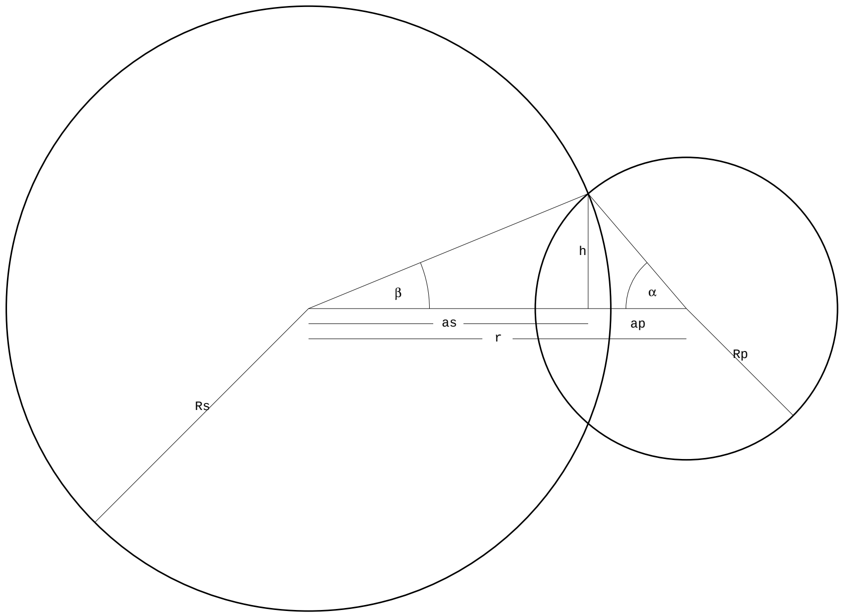


Abbildung 1: Die geometrischen Verhältnisse bei einer Bedeckung des Primärsterns durch den Sekundärstern

Fall 3 $R_s - R_p < r < R_s + R_p$

In diesem Fall ist der Primärstern teilweise verdeckt (s. Abb. 1).

Berechnung von h

$$
\begin{aligned}
a_p^2 &= R_p^2 - h^2 && (3)\\
a_s^2 &= R_s^2 - h^2 && (4)\\
a_p + a_s &= r && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Gleichung (5) ist auch richtig für $a_p < 0$, wenn $r < R_s$.

$$
\begin{aligned}
\text{(4) und (5)} \quad \Longrightarrow \quad (r - a_p)^2 &= R_s^2 - h^2 && (7)\\
\Longrightarrow \quad a_p &= r - \sqrt{R_s^2 - h^2} && (8)\\
\stackrel{(3)}{\Longrightarrow} \quad R_p^2 - h^2 &= r^2 + R_s^2 - h^2 - 2r\sqrt{R_s^2 - h^2} && (9)\\
\Longrightarrow \quad 2r\sqrt{R_s^2 - h^2} &= r^2 + R_s^2 - R_p^2 && (10)\\
\Longrightarrow \quad h &= \sqrt{R_s^2 - \left(\frac{r^2 + R_s^2 - R_p^2}{2r}\right)^2} && (11)
\end{aligned}
$$

[2]Der quadratische Term wurde zur Anpassung an HS0705-Daten erforderlich.

Die bedeckte Fläche des Primärsterns besteht aus zwei Kugelabschnitten. Um deren Flächen K_p und K_s berechnen zu können, müssen zunächst die zugehörigen Zentralwinkel α und β berechnet werden.

Berechnung von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$

$$\alpha = \arcsin \frac{h}{R_p} = \arctan \frac{h}{\sqrt{R_p^2 - h^2}} \tag{12}$$

Bei dieser Berechnung ergibt sich $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Der Fall $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (wenn $r < \sqrt{R_s^2 - R_p^2}$ ist) wird weiter unten berücksichtigt.

$$\beta = \arcsin \frac{h}{R_s} = \arctan \frac{h}{\sqrt{R_s^2 - h^2}} \tag{13}$$

Wegen $R_s > R_p$ ist immer $\beta < \frac{\pi}{2}$, sodass keine Fallunterscheidung nötig ist.

Berechnung der beiden Kreisabschnitte

$$K_p = \pi R_p^2 \frac{2\alpha}{2\pi} - h\sqrt{R_p^2 - h^2} = R_p^2 \alpha - h\sqrt{R_p^2 - h^2} \tag{14}$$

Der Fall $\alpha > \frac{\pi}{2}$ kann nun durch die folgende Ersetzung berücksichtigt werden:

$$r < \sqrt{R_s^2 - h^2} \quad \Longrightarrow \quad K_p := \pi R_p^2 - K_p \tag{15}$$

Entsprechend gilt

$$K_s = R_s^2 \beta - h\sqrt{R_s^2 - h^2} \tag{16}$$

Für den Gesamtfluss ergibt sich damit

- für den Fall, dass der Primärstern vom Sekundärstern bedeckt wird,

$$\boldsymbol{F = F_s + \frac{F_p}{\pi R_p^2}\left(\pi R_p^2 - K_p - K_s\right) = F_s + F_p \left(1 - \frac{K_p + K_s}{\pi R_p^2}\right) + \Delta F} \tag{17}$$

- und wenn der Primärstern vor dem Sekundärstern vorbeizieht:

$$\boldsymbol{F = F_p + F_s \left(1 - \frac{K_p + K_s}{\pi R_s^2}\right) + \Delta F} \tag{18}$$

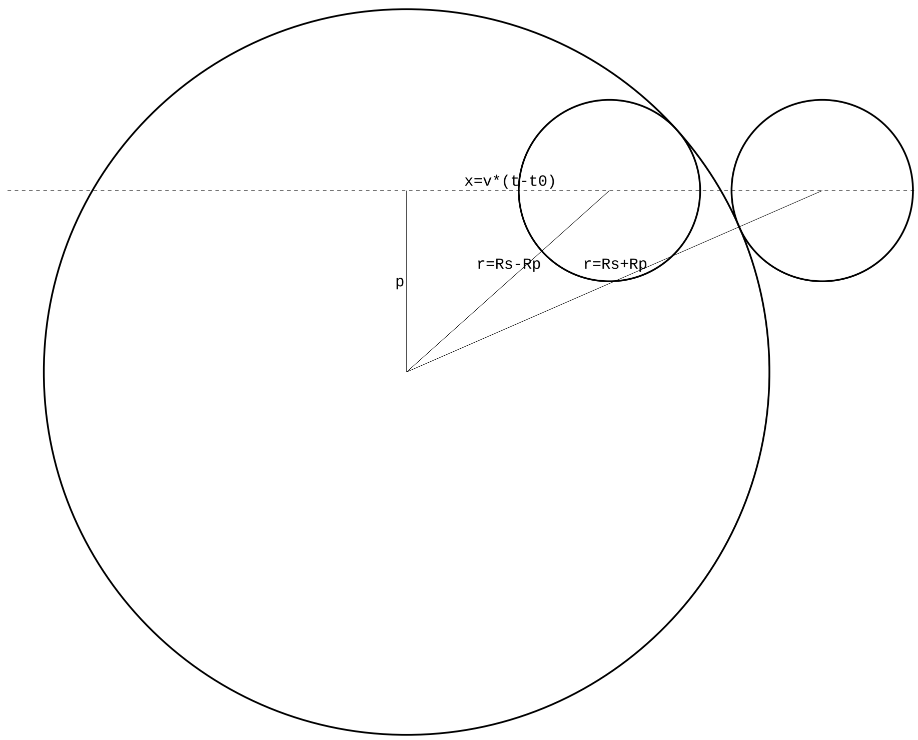


Abbildung 2: Zur Berechnung der Kontaktzeiten

Berechnung der Kontaktzeiten

Für die beiden Kontaktzeiten gilt (s. Abb. 2):

$$p < R_s + Rp \quad \Longrightarrow \quad v\frac{\Delta t_E}{2} = \sqrt{(R_s + R_p)^2 - p^2} \tag{19}$$

$$p < R_s - R_p \quad \Longrightarrow \quad v\frac{\Delta t_D}{2} = \sqrt{(R_s - R_p)^2 - p^2} \tag{20}$$

Mit Hilfe von (19) lässt sich der Parameter v durch die Dauer der Verfinsterung Δt_E ersetzen:

$$v = \frac{2}{\Delta t_E}\sqrt{(R_s + R_p)^2 - p^2} \tag{21}$$

Durch Division der Gleichungen (19) und (20) erhält man

$$\gamma^2 := \left(\frac{\Delta t_D}{\Delta t_E}\right)^2 = \frac{(R_s - R_p)^2 - p^2}{(R_s + R_p)^2 - p^2} \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \quad p = \sqrt{\frac{(R_s - R_p)^2 - \gamma^2(R_s + R_p)^2)}{1 - \gamma^2}} \tag{23}$$

Diese Beziehung kann man verwenden, entweder um den Eingabeparameter p durch die Totalitätszeit Δt_D zu ersetzen oder um einen vernünftigen Schätzwert für p eingeben zu können.

Die Berechnung des Gesamtflusses F zu einem beliebigen Zeitpunkt t muss also in folgenden Schritten ablaufen:

1. Berechnung von v aus Δt_E mit Gleichung (21)
2. $x = v(t - t_0)$
3. Berechnung des Abstandes r zwischen den Sternmittelpunkten: $r = \sqrt{x^2 + p^2}$
4. Berechnung der überlagerten Helligkeitstendenz $\Delta F = m(t - t_0)$
5. Berechnung von h mit Hilfe von (11)
6. Berechnung der bedeckten Flächen gemäß (14), (15) und (16)
7. Berechnung des Gesamtflusses gemäß (17) bzw. (18)

3 Ergebnisse

3.1 Der Einfluss der Bedeckungsparameter

Man kann sich (z. B.) die folgenden Aussagen theoretisch klar machen oder vom Programm `PlanetFinders` oder mit Hilfe der Excel-Tabelle `Doppelstern` visualisieren lassen:

- Je heller der Primärstern ist, desto tiefer ist das Helligkeitsminimum.
- Je kleiner der Primärstern (im Verhältnis zum Sekundärstern) ist, desto steiler sind die Flanken des Helligkeitseinbruchs und desto länger dauert die Totalität..
- Je größer der Stoßparameter ist, desto flacher sind die Flanken und desto kürzer ist die Verfinsterungsdauer.
- Ist der Stoßparameter größer als ein bestimmter Grenzwert, dann tritt keine Totalität auf.

3.2 Modellanpassung an Messwerte

Mit den in der Tabelle enthaltenen Schiebern ist es mit ein wenig Übung recht einfach möglich, die Parameter so einzustellen, dass sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Messwerten und Näherungskurve ergibt (die blauen Kurven in Abbildung 3). Mit dem in `Excel` eingebauten *Solver* werden die Parameter so verändert, dass die Fehlersumme ein (lokales!) Minimum annimmt. Die sich mit diesen Parametern ergebende Modellkurve verbessert den Fit auch optisch meist deutlich (rote Kurven in Abb. 3).
Allerdings ist es bisher noch nicht gelungen, auf diese Weise die „richtigen“ Parameter zu finden, da man selbst für dieselben Messwerte trotz sehr ähnlicher Ausgangskurven zu völlig verschiedenen Parametersätzen gelangen kann. Sie beschreiben verschiedene physikalische Systeme, die Qualität der Fits kann aber optisch nicht unterschieden werden[3].
Bei dem Beispiel in Abbildung 3 ergaben sich z.B. folgende Werte:

[3] Auch die Summen der Fehlerquadrate sind in diesem Beispiel annähernd gleich groß, liefern also kein Kriterium für die Entscheidung für eins der Modelle.

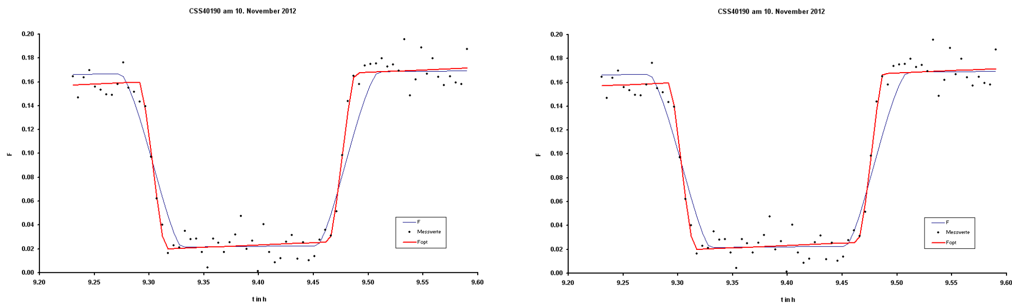


Abbildung 3: Auswertung der Beobachtung von CSS40190 am 10. November 2012. Mit *denselben* Messwerten wurde die Optimierung mit ähnlichen, aber unterschiedlichen Parametern gestartet.

Par.	links	rechts
v in R_s/h	10.7	4.6
p	0.37	0.92
R_p/R_s	0.12	0.02
F_p/F_s	6.2	6.2

Man kann sich qualitativ überlegen, dass bei diesen beiden Systemen ähnliche Helligkeitsverläufe herauskommen[4]: Im rechten System bewegt sich der Primärstern langsamer, dafür „trifft“ er aber den Sekundärstern stärker exzentrisch, sodass die „Finsternisstrecke“ kürzer ist. Der Primärstern ist rechts sehr klein. Deshalb der Stoßparameter groß sein, damit die sich eine genügend lange „partielle Verfinsterung“ ergibt.

4 Anhang

Im Folgenden werden Computeralgorithmen aufgelistet, die die auf Seite 6 beschriebenen Berechnungsschritte erledigen.

4.1 Tabellenkalkulation (Visual Basic)

Die hauptsächliche Motivation zur Entwicklung des Algorithmus war das Anpassen eines Modells an gemessene Helligkeitskurven um

- die Bedeckungsmitte möglichst genau zu bestimmen und
- eventuell Informationen über die physikalischen Parameter des Systems zu erhalten.[5]

[4]Diese Überlegungen kann man auch mit dem Programm `PlanetFinders` dadurch nachvollziehen, dass man die entsprechenden Parameter einstellt. Allerdings können keine unterschiedliche Geschwindigkeiten gewählt werden. Dadurch scheinen die Finsternisdauern unterschiedlich lange zu dauern.

[5]Diese Hoffnung hat sich bisher nicht erfüllt, da aufgrund der Messfehler und der Vielzahl der Parameter verschiedene Lösungen des Optimierungsproblems existieren.

Der Fall der Bedeckung des Sekundärsterns durch den Primärstern wird bisher nicht berücksichtigt.

```
Public Function f(t, t0, v, p, Rs, Rp, Fs, Fp, m, a As Double) As Double ' für Rp<Rs

Dim x, h, Ap, Kp, Ks, alpha, beta, deltaf As Double

x = v * (t - t0)
r = Sqr(p ^ 2 + x ^ 2)
deltaf = m * (t - t0) + a * (t - t0) ^ 2

If r <= Rs - Rp Then
f = Fs + deltaf

ElseIf r >= Rs + Rp Then
f = Fs + Fp + deltaf

Else
Ap = pi() * Rp ^ 2 ' Fläche des Primärsterns
' Berechnung der Schnittlinie:
h = Sqr(Rs ^ 2 - ((r ^ 2 + Rs ^ 2 - Rp ^ 2) / (2 * r)) ^ 2)
' Berechnung der Kugelkappe des Primärsterns:
alpha = Atn(h / Sqr(Rp ^ 2 - h ^ 2))
Kp = Rp ^ 2 * alpha - h * Sqr(Rp ^ 2 - h ^ 2)
If r < Sqr(Rs * Rs - Rp * Rp) Then
Kp = Ap - Kp
End If

' Berechnung der Kugelkappe des Sekundärsterns:
beta = Atn(h / Sqr(Rs ^ 2 - h ^ 2))
Ks = Rs ^ 2 * beta - h * Sqr(Rs ^ 2 - h ^ 2)

f = Fs + Fp * (1 - (Kp + Ks) / Ap) + deltaf
End If
End Function
```

Den Fall $R_p > R_s$ erledigt die folgende, leicht abgewandelte, Funktion:

```
Public Function fu(t, t0, v, p, Rs, Rp, Fs, Fp, m, a As Double) As Double ' für Rp>Rs

Dim x, h, Ap, Ask, Kp, Ks, alpha, beta, deltaf As Double

x = v * (t - t0)
r = Sqr(p ^ 2 + x ^ 2)
deltaf = m * (t - t0) + a * (t - t0) ^ 2
Ap = pi() * Rp ^ 2 ' Fläche des Primärsterns
Ask = pi() * Rs ^ 2 ' Fläche des Sekundärsterns
```

```
If r <= Rp - Rs Then
fu = Fp * (Ap - Ask) / Ap + Fs + deltaf

ElseIf r >= Rs + Rp Then
fu = Fs + Fp + deltaf

Else
' Berechnung der Schnittlinie:
h = Sqr(Rs ^ 2 - ((r ^ 2 + Rs ^ 2 - Rp ^ 2) / (2 * r)) ^ 2)
' Berechnung der Kugelkappe des Primärsterns:
alpha = Atn(h / Sqr(Rp ^ 2 - h ^ 2))
Kp = Rp ^ 2 * alpha - h * Sqr(Rp ^ 2 - h ^ 2)

' Berechnung der Kugelkappe des Sekundärsterns:
beta = Atn(h / Sqr(Rs ^ 2 - h ^ 2))
Ks = Rs ^ 2 * beta - h * Sqr(Rs ^ 2 - h ^ 2)
If r < Sqr(Rp * Rp - Rs * Rs) Then Ks = Ask - Ks

fu = Fs + Fp * (1 - (Kp + Ks) / Ap) + deltaf
End If
End Function
```

Diese Funktionen sind in der `Excel`-Tabelle `Doppelsternbeispiel.xls`[6] implementiert. In einer kurzen Anleitung wird dort beschrieben, wie diese Tabelle für die Auswertung beliebiger Helligkeitsserien verwendet werden kann.

4.2 Pascal

Das Pascal-Programm dient der – auch langfristigen – grafischen Visualisierung des Bedeckungsvorganges und der resultierenden Helligkeitskurve und Periodenänderung. Eine Helligkeitstendenz (ΔF) wird deshalb nicht berücksichtigt.

```
function Gesamthelligkeit(rS1, rS2: rVektor): real;
                              (* ... gemäß Algorithmus in "Doppelstern.pdf" *)
(* Die Routine verwendet die folgenden globalen Variablen:
   - rS1, rS2: kartesische geozentrische Ortsvektoren der Sterne,
   - wrS1, wrS2: Winkelradien der Sterne,
   - HelligkeitS1, HelligkeitS2: Helligkeit ("Flüsse") der Sterne,
   - AS1, AS2: (Winkel-) Flächen der Sterne *)

   var r, h, alpha, beta, K1, K2: real;

   begin
   r:=sqrt(sqr(rS1[1]-rS2[1])+sqr(rS1[3]-rS2[3]));(* Winkelabstand der Sterne *)
   if r>=wrS1+wrS2                                       (* keine Bedeckung *)
```

[6] `http://www.astronomie-und-internet.de/pf/DoppelsternBeispiel.xls`

```
    then Gesamthelligkeit:=maxHelligkeit
    else if r<=wrS2-wrS1                          (* vollständige Bedeckung *)
            then
               begin
               if rS1[2]>rS2[2]         (* Primärstern hinter Sekundärstern *)
                  then Gesamthelligkeit:=HelligkeitS2
                  else Gesamthelligkeit:=
                          HelligkeitS1+HelligkeitS2*(AS2-AS1)/AS2;
               end
            else                                      (* partielle Finsternis *)
               begin
               h:=sqrt(sqr(wrS2)-sqr((r*r+sqr(wrS2)-sqr(wrS1))/(2.0*r)));
               alpha:=arctan(h/sqrt(sqr(wrS1)-h*h));
               beta:=arctan(h/sqrt(sqr(wrS2)-h*h));
               K1:=AS1*alpha/pi-h*sqrt(sqr(wrS1)-h*h);
               if r<sqrt(sqr(wrS2)-h*h) then K1:=AS1-K1;
               K2:=AS2*beta/pi-h*sqrt(sqr(wrS2)-h*h);
               if rS1[2]>rS2[2]         (* Primärstern hinter Sekundärstern *)
                  then Gesamthelligkeit:=
                          HelligkeitS2+HelligkeitS1*(1.0-(K1+K2)/AS1)
                  else Gesamthelligkeit:=
                          HelligkeitS1+HelligkeitS2*(1.0-(K1+K2)/AS2);
               end;
  end;
```

Diese Funktion ist der Kern des `Delphi`-Programms `PlanetFinders`[7] für Windows[8], das den Bedeckungsvorgang visualisiert und die resultierenden Helligkeitskurven und Periodenänderungen[9] zeichnet.

Literatur

[1] Backhaus, U., *Planet Finders: Die Suche nach Exoplaneten*, `http://www.astronomie-und-internet.de/PlanetFinders.html`. Die Seite ist noch in Bearbeitung.

[2] Bruton, D., *ECLIPSING BINARY STARS. A Simple Model for Computing Light Curves*, `http://www.physics.sfasu.edu/astro/ebstar/ebstar.html`

[3] Eclipsing Binary Simulation, Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln, `http://astro.unl.edu/naap/ebs/animations/ebs.html`

[7] `http://www.astronomie-und-internet.de/pf/PlanetFinders.zip`
[8] Leider kann ich noch nicht in `Java` programmieren.
[9] Die Bewegung der Erde um die Sonne wird dabei nicht berücksichtigt.